MANUALI HOEPLI

Prof. E. PASCAL

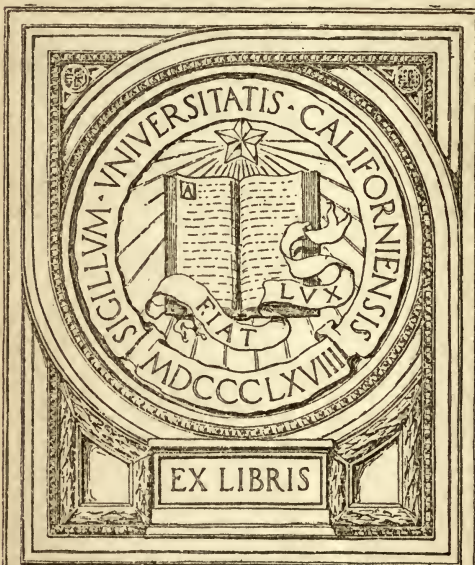
REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI

(Definizioni - Formole - Teoremi - Cenni bibliografici)

II. GEOMETRIA

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

MANUALI HOEPLI

REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI

(DEFINIZIONI - FORMOLE - TEOREMI - CENNI BIBLIOGRAFICI)

PER

ERNESTO PASCAL

PROF. ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

II.

GEOMETRIA.

- Fondamenti di Geom. proiettiva e analitica
- Forme alg. ternarie, quaternarie, ecc.
- Connessi
- Coniche
- Quadriche
- Curve piane in generale
- Cubiche piane e storte
- Quartiche piane e storte
- Superf. e curve storte in generale
- Superf. cubiche
- Superf. di 4.° ordine
- Superf. di ord. superiore
- Geometria della retta
- Geometria della sfera
- Geometria numerativa
- Geom. infinites. ed intrins.
- Curve e superficie speciali
- Analysis situs
- Geometria proiettiva negli iperspazii
- Geometria infinites. ed intrinseca negli iperspazii
- Geometria non euclidea.

Indice alfabetico del primo e secondo volume.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1900.

INDICE.

PREFAZIONE . . . . Pag. XV

PARTE II.

GEOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

LA GEOMETRIA DELLE FORME CONTINUE FONDAMENTALI.

§ 1. Definizioni e concetti introduttori. . . . . Pag. 3
§ 2. La geometria delle forme di 1.ª specie . . „ 11
§ 3. Geometria delle forme di 2.ª specie. Piano punteggiato e rigato . . . . „ 28
§ 4. Geometria delle forme fondamentali di 3.ª specie. Lo spazio di punti e di piani . . „ 49

CAPITOLO II.

GEOMETRIA DELLE FORME DISCONTINUE.

§ 1. Generalità . . . . Pag. 68
§ 2. Proprietà proiettive delle coppie, terne, quaterne di punti su di una retta. Centri armonici. Apolarità. Involuzioni . . . . . „ 71
§ 3. Sistemi lineari di gruppi di punti. Involuzioni generali . . . . „ 76
§ 4. Proprietà proiettive dei triangoli, quadrangoli, esagoni, ecc. . . . . „ 83

§ 5. Geometria metrica del triangolo piano. Formole di trigonometria piana . . . . . Pag. 86
§ 6. Geometria metrica del triedro e del triangolo sferico. Formole di trigonometria sferica . . . . „ 89

CAPITOLO III.

TEORIA INVARIANTIVA DELLE FORME ALGEBRICHE. CONNESSI.

§ 1. Generalità sulle forme algebriche . . . . Pag. 99
§ 2. Principio di trasporto . . . . „ 108
§ 3. I connessi. Le coincidenze . . . . „ 112
§ 4. Alcune proprietà generali sulle forme algebriche qualunque. Jacobiani. Hessiani. Legge d'inerzia delle forme quadratiche. Apolarità . . . . „ 117

CAPITOLO IV.

LE CONICHE.

§ 1. Generazione proiettiva delle coniche. Proprietà che ne dipendono immediatamente. Pag. 124
§ 2. Proprietà fondamentali proiettive delle coniche. Teoremi di Pascal, Brianchon, Desargues . . . . „ 127
§ 3. Formole principali di geometria analitica delle coniche . . . . „ 131
§ 4. Principali proprietà metriche delle coniche . „ 144
§ 5. Proprietà focali delle coniche . . . . . . „ 147
§ 6. Fasci di coniche . . . . „ 151
§ 7. Le formazioni invariantive del sistema di una o due forme ternarie quadratiche . . „ 154

CAPITOLO V.

LE QUADRICHE.

§ 1. Generazione proiettiva delle quadriche. Polarità . . . . Pag. 159

§ 2. Principali formole di geometria analitica delle quadriche . . . . „ 166

§ 3. Proprietà focali delle quadriche . . . . . „ 184

§ 4. Proprietà metriche delle quadriche. Quadriche equilatere . . . . „ 189

§ 5. Fasci e reti di quadriche . . . . „ 192

CAPITOLO VI.

TEORIA GENERALE DELLE CURVE PIANE ALGEBRICHE.

§ 1. Generalità. Punti singolari. Formole di Plücker. Discriminante . . . . Pag. 196

§ 2. Teoria della polarità. Curve covarianti. . . „ 208

§ 3. Sistemi lineari di curve piane . . . . „ 219

§ 4. I gruppi di punti su di una curva algebrica „ 227

§ 5. Trasformazioni biunivoche del piano o di curve piane. Trasformazioni multiple . . „ 240

CAPITOLO VII.

LE CUBICHE PIANE.

§ 1. Generalità sulle cubiche. Punti di flesso. Punti tangenziali . . . . Pag. 249

§ 2. Generazioni proiettive delle cubiche . . . „ 255

§ 3. Forme canoniche dell' equazione di una cubica. Classificazioni varie delle cubiche . „ 257

§ 4 La forma cubica ternaria. Suoi invarianti e covarianti . . . . „ 263

CAPITOLO VIII.

LE QUARTICHE PIANE.

§ 1. Generalità. Generazioni delle quartiche. Tangenti doppie. Coniche e cubiche di contatto. Pag. 271
§ 2. Quartiche con punti singolari . . . . . . „ 282
§ 3. La forma quartica ternaria . . . . „ 286

CAPITOLO IX.

TEORIA GENERALE DELLE SUPERFICIE E CURVE GOBBE ALGEBRICHE.

§ 1. Generalità. Superficie sviluppabili e gobbe. Intersezioni di superficie. Geometria sulle superficie algebriche. . . . . Pag. 289
§ 2. Rappresentazione analitica delle curve storte. Le superficie monoidi di Cayley . . . . „ 303
§ 3. Classificazione delle curve storte . . . . . . „ 307
§ 4. Punti singolari di superficie e curve gobbe. Loro numeri caratteristici. Secanti multiple delle curve gobbe. Genere. Formole di Cayley. Contatti di superficie . . . . „ 314
§ 5. Superficie polari. Superficie covarianti. . . „ 330
§ 6. Sistemi lineari di superficie . . . . „ 333
§ 7. Trasformazione birazionale dello spazio, o delle superficie. Rappresentazione piana delle superficie . . . . „ 336

CAPITOLO X.

LE CURVE STORTE DI VARI ORDINI.

§ 1. Le curve sulle superficie di 2.º ordine. Le curve sferiche . . . . Pag. 346
§ 2. Le cubiche storte o gobbe . . . . „ 353
§ 3. Le quartiche gobbe di 1.ª specie . . . . . . „ 362

§ 4. Quartiche gobbe di 2.ª specie . . . . Pag. 368
§ 5. Le curve storte di 5.º, 6.º, ecc. ordine . . . „ 375
§ 6. Le curve storte razionali . . . . „ 382

CAPITOLO XI.

LE SUPERFICIE DI 3.º ORDINE.

§ 1. Generalità. Le superficie a punti doppi. Generazioni geometriche . . . . Pag. 386
§ 2. Il pentaedro di Sylvester. L'Hessiana della superficie cubica . . . . „ 402
§ 3. Le rette della superficie di 3.º ordine. I piani tritangenti. Gli esaedri polari di Cremona. „ 407
§ 4. Classificazione delle superficie cubiche reali generali . . . . „ 416
§ 5. Rappresentazioni piane della superficie cubica „ 417
§ 6. La forma cubica quaternaria . . . . „ 419

CAPITOLO XII.

LE SUPERFICIE DI 4.º ORDINE.

§ 1. Generalità. Superficie a punti doppi e a linee doppie . . . . Pag. 422
§ 2. Le superficie quartiche a punti doppi . . . „ 425
§ 3. La superficie di Kummer . . . . „ 430
§ 4. Il tetraedroide di Cayley e la superficie delle onde . . . . „ 442
§ 5. Superficie di 4.º ordine contenenti infinite coniche . . . . „ 447
§ 6. Le superficie di 4.º ordine a conica doppia o cuspidale . . . . „ 450
§ 7. Le ciclidi. La ciclide di Dupin . . . . . . „ 461
§ 8. Le superficie di 4.º ordine con una retta doppia . . . . „ 471
§ 9. La superficie romana di Steiner . . . . . „ 474
§ 10. Le rigate di 4.º ordine . . . . „ 480

CAPITOLO XIII.

SUPERFICIE DI ORDINE SUPERIORE AL QUARTO. SUPERFICIE RIGATE.

§ 1. Superficie di 5.° ordine non rigate . . . . Pag. 494
§ 2. Sviluppabili di 5.° ordine . . . . „ 499
§ 3. Rigate gobbe di 5.° ordine . . . . „ 503
§ 4. Superficie di 6.° ordine, o classe . . . . . „ 507
§ 5. Sviluppabili di 7.° ordine . . . . „ 514
§ 6. Superficie rigate di ordine qualunque . . . „ 515
§ 7. Superficie razionali. Superficie a sezioni razionali, o ellittiche, o iperellittiche . . . „ 526

CAPITOLO XIV.

LA GEOMETRIA DELLA RETTA NELLO SPAZIO, E LA GEOMETRIA DELLA SFERA.

§ 1. Generalità. Coordinate di rette nello spazio. Pag. 529
§ 2. Complesso algebrico generale di grado n. La notazione simbolica di Battaglini e di Clebsch. Forme invariantive del complesso „ 537
§ 3. I complessi lineari . . . . „ 544
§ 4. Fasci e reti di complessi lineari . . . . . „ 547
§ 5. Complessi lineari involutori di Klein . . . „ 549
§ 6. Complessi quadratici in generale . . . . . „ 551
§ 7. Classificazione dei complessi quadratici . . „ 558
§ 8. Complesso Battaglini o armonico . . . . . „ 573
§ 9. Complesso di Reye o tetraedrale . . . . . „ 575
§ 10. Teoria generale delle congruenze di rette . „ 578
§ 11. Congruenze di 1.° ordine . . . . „ 585
§ 12. Congruenze di 2.° ordine senza linee singolari „ 587
§ 13. Congruenze di 2.° ordine con linee singolari. „ 594
§ 14. Geometria della sfera . . . . „ 599

CAPITOLO XV.

GEOMETRIA NUMERATIVA.

§ 1. Generalità. Principio della conservazione del numero . . . . Pag. 604
§ 2. Calcolo simbolico delle condizioni. Formole di incidenza e coincidenza. Teoremi sui contatti . . . . „ 608
§ 3. Teoria delle caratteristiche . . . . „ 618
§ 4. Metodo per la ricerca dei numeri caratteristici per un sistema di forme e riassunto di alcuni notevoli risultati di Geometria numerativa . . . . „ 622

CAPITOLO XVI.

TEORIA INFINITESIMALE DELLE CURVE E SUPERFICIE.

§ 1. Tangenti e normali a curve e superficie . . Pag. 631
§ 2. Concavità e convessità delle curve piane. Inflessione . . . . „ 637
§ 3. Aree piane, archi, volumi, e aree superficiali . . . . „ 638
§ 4. Curvatura delle linee piane e storte. Torsione. Equazioni intrinseche . . . . . . „ 649
§ 5. Contatti di curve e superficie . . . . „ 659
§ 6. Inviluppi di curve e superficie. Superficie sviluppabili . . . . „ 662
§ 7. Evolute ed evolventi . . . . „ 664
§ 8. Coordinate curvilinee. Elemento lineare delle superficie. Forme differenziali fondamentali delle superficie. Rappresentazione conforme. Rappresentazione sferica . . . . „ 666
§ 9. Linee tracciate sulle superficie. Linee di curvatura. Tangenti coniugate. Linee geodetiche. Linee assintotiche . . . . „ 677

§ 10. Curvature delle superficie. Applicabilità delle superficie . . . . Pag. 693
§ 11. Superficie a curvatura totale costante. Superficie pseudosferiche . . . . „ 699
§ 12. Superficie a curvatura media costante. Superficie minime . . . . „ 707
§ 13. Superficie evolute . . . . „ 715
§ 14. Sistemi tripli di superficie ortogonali . . . „ 718
§ 15. Congruenze di rette . . . . „ 722

CAPITOLO XVII.

PRINCIPALI GENERAZIONI E TRASFORMAZIONI METRICAMENTE SPECIALIZZATE DI CURVE E SUPERFICIE. LA GEOMETRIA DI CURVE SPECIALI.

§ 1. Curve e superficie inverse ed arguesiane. Trasformazione per raggi vettori reciproci. Trasformazione Arguesiana . . . . . . Pag. 730
§ 2. Podaria di una curva piana o di una superficie . . . . „ 733
§ 3. Curve e superficie caustiche . . . . „ 735
§ 4. Curve e superficie parallele e curve e superficie concoidi . . . . „ 739
§ 5. Curve settrici . . . . „ 740
§ 6. Curve cicloidali o rullette. Curve di sdrucciolamento . . . . „ 741
§ 7. Superficie di rotazione; cilindriche; coniche; conoidi . . . . „ 743
§ 8. Coniche . . . . „ 744
§ 9. Cissoidi. Cubica o versiera di Agnesi. Trisettrice di Maclaurin. Strofoide. Folium . . „ 749
§ 10. Ovali di Cassini. Lemniscata. Curva ad otto. „ 754
§ 11. Ovali di Cartesio. Lumaca di Pascal. Cardioide. Concoide di Nicomede. Spiriche . „ 760
§ 12. Cicloide. Trocoide. Ipocicloide. Epicicloide. Astroide. Tetracuspide . . . . „ 766

§ 13. Le spirali. Le curve di Ribaucour . . . . Pag. 771
§ 14. Catenaria. Curve di Delaunay. Trattrice. Sinusoide. Quadratrice. Curva elastica. . . „ 776
§ 15. Curve gobbe. Eliche. Lossodromiche . . . „ 781
§ 16. Cicliche sferiche. Finestre di Viviani. Spiriche sferiche . . . . „ 784

CAPITOLO XVIII.

ANALYSIS SITUS O TOPOLOGIA. TEORIA DEI POLIEDRI. CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE DI RIEMANN.

§ 1. Connessione delle superficie. Superficie unilatere e bilatere. Numero fondamentale. Genere . . . . Pag. 786
§ 2. Connessione degli spazi . . . . „ 794
§ 3. Rete poliedrale. Teorema di Eulero. Poliedri dello spazio a tre e a più dimensioni . . „ 796
§ 4. Connessione delle superficie di Riemann. Riemanniane regolari e simmetriche . . . . „ 803
§ 5. Le Riemanniane in senso proiettivo di Klein „ 811

CAPITOLO XIX.

GEOMETRIA PROJETTIVA DEGLI IPERSPAZI.

§ 1. Generalità. Varietà lineari. Relazioni proiettive e metriche. Corrispondenze omografiche . . . . Pag. 814
§ 2. Varietà non lineari. Ipersuperficie. Rappresentazione monoidale . . . . „ 823
§ 3. Le iperquadriche di S_n. Indicazioni sulle ipersuperficie cubiche di S_4 . . . . „ 827
§ 4. Le superficie cioè le varietà a due dimensioni dello spazio S_n. Le rigate. La superficie di Veronese per lo spazio S_5 . . . „ 830
§ 5. Le curve negli spazi S_n . . . . „ 835

CAPITOLO XX.

LA GEOMETRIA INFINITESIMALE E INTRINSECA NEGLI IPERSPAZI LINEARI E NEGLI SPAZI A CURVATURA COSTANTE.

§ 1. Le curve negli iperspazi lineari . . . . . Pag. 844
§ 2. Geometria differenziale delle varietà a più dimensioni immerse in spazi lineari. Forme differenziali quadratiche . . . . „ 848
§ 3. Deformazione, spostamenti e curvatura Riemanniana di uno spazio. Spazi a curvatura Riemanniana costante . . . . „ 853
§ 4. Altra estensione del concetto di curvatura per una varietà o spazio a più che due dimensioni, immerso in uno spazio superiore . . . . „ 862
§ 5. La Geometria differenziale delle varietà a due dimensioni (superficie) immerse negli spazi a curvatura costante di Riemann . . . . „ 867

CAPITOLO XXI.

LA GEOMETRIA ASSOLUTA, E SPECIALMENTE LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA NEL PIANO E NELLO SPAZIO.

§ 1. Cenno storico sulla Geometria non euclidea . . . . Pag. 869
§ 2. Il postulato V d'Euclide. I risultati ottenuti sino a Lobatschewsky e Bolyai. Le tre geometrie dal punto di vista elementare . „ 873
§ 3. Le relazioni metriche ordinarie sotto forma proiettiva . . . . „ 882
§ 4. L'assoluto di Cayley. La metrica proiettiva. Interpretazione proiettiva delle tre geometrie . . . . „ 886

§ 5. Rappresentazione di Beltrami della geometria non euclidea, su superficie o varietà superiori degli spazi euclidei . . . . . Pag. 890

CAPITOLO XXII.

GEOMETRIA MODERNA DEL TRIANGOLO.

Punti e circoli di Lemoine e di Brocard. Retta di Eulero. Circolo dei nove punti o di Feuerbach. Circoli di Taylor, di Tucker. Retta di Simpson . Pag. 892

Indice alfabetico delle cose contenute nel I e II volume di quest'Opera . . . . Pag. 901

PREFAZIONE

La buona accoglienza fatta dal pubblico matematico alla prima parte di quest'opera, * mi ha indotto ad occuparmi con maggior cura e diligenza di questa seconda parte, la quale è riuscita assai più estesa, e ricca di particolari e di notizie, e mi è costata assai maggior fatica.

Avendo, nella Prefazione della prima parte, già trattato degli scopi del mio lavoro, e degli intenti che con esso io mi proponevo di raggiungere, posso ora ritenermi dispensato dal ripetere le cose già dette in quell'occasione.

Un lavoro come questo che io pubblico, può anche rendere, parmi, il gran servigio di estendere con una relativa facilità la cultura dei giovani matematici, che molte volte hanno il grave torto di specializzarsi troppo, cioè di dedicarsi, con troppo esclusivismo, ad una specialissima parte delle matematiche, trascurando tutte le altre.

---

* Una traduzione tedesca di quest' opera, per cura di A. Schepp, è in corso di stampa a Leipzig pei tipi del celebre editore Teubner, e una traduzione polacca per cura di S. Dickstein si sta pubblicando a Warszawa.

La specializzazione negli studi è venuta a mano a mano come una necessaria conseguenza dell'immenso sviluppo che in questo secolo hanno preso le varie parti della scienza, ma anche nella specializzazione una misura ci vuole, e io ho sempre pensato che non è bello il vedere dei matematici limitare, quasi deliberatamente, la propria cultura solo ad un ristrettissimo campo, e credersi legittimamente dispensati dal volgere anche un solo sguardo ai campi vicini: è poi meno bello ancora il vedere dei giovani acquistare troppo presto una siffatta tendenza.

Ora io credo che noi dobbiamo combattere, con tutte le nostre forze, una così pericolosa tendenza. Una dieta intellettuale che comincia e finisce con un cibo solo non può essere profittevole per alcuno, e può essere invece causa di grandi mali, perchè, come una volta disse Gladstone in un discorso tenuto nel 1879 agli studenti dell'Università di Glasgow, con cotesta esclusività ci si priva del benefizio di quella luce di fianco che i regni della scienza gittano l'uno sull'altro, e ci si dispone ad esagerare la forza, il valore e forse la importanza del proprio particolare merito. Ora se ciò è vero per i rapporti che le varie scienze hanno le une colle altre, quanto non sarà vero per le varie parti, divisioni e suddivisioni della medesima scienza? E quanto non sarà vero ancor più per le scienze matematiche, i cui più recenti progressi hanno sempre viemeglio mostrato quanto sieno fragili le barriere che pareva ne separassero le varie parti?

Alla fine di questo volume ho fatto seguire un particolareggiato indice alfabetico di tutte le cose contenute nel 1.° e nel 2.°. Quei critici che si sono meravigliati della mancanza di un tale indice alla fine della prima parte, non hanno pensato che sarebbe stato inutile e assai meno comodo il fare due separati indici alfabetici.

Nelle indicazioni bibliografiche sono stato alquanto più diffuso in questo secondo volume. Però non si creda che abbia citato tutto ciò che c'era da citare, il che mi sarebbe parso eccessivo ed inutile; ciò che è necessario, parmi, si è solo di porre bene in vista i lavori più importanti riflettenti un determinato soggetto, quelli cioè che hanno tracciato l'orma più profonda e che sono da reputarsi il fondamento degli altri; chè se invece ci si lascia dominare dalla manìa di citar troppo si finisce col far perdere al lettore l'orientamento più naturale e più semplice.

Nella disposizione generale delle varie parti, sono stato costretto alle volte, per seguire un certo ordine di simmetria, da cui ho creduto bene non allontanarmi, a non seguire l'ordine logico, e a porre in precedenza qualche teoria, per le dimostrazioni riguardanti la quale (ma, si badi bene, non per comprenderne i risultati) occorrerebbe qualche concetto che appartiene a teorie poste dopo; per l'indole del nostro libro non mi sembra che ciò possa reputarsi un inconveniente.

Devo poi ancora avvertire che il posto più naturale del Cap. XXII *(Geometria del triangolo)* sarebbe stato alla fine del Cap. II; ma i fogli di questo capitolo erano già stampati quando pensai

alla opportunità di fare anche un cenno dei moderni studi sulla Geometria del triangolo.

Terminando questa Prefazione debbo infine rendere pubbliche grazie al solerte e operoso Editore Comm. U. Hoepli alla cui larga liberalità si deve se libri di tal genere possano pubblicarsi in Italia; e devo infine ringraziare di cuore il Sig. Dottor U. Aeschlimann di Winterthur che, offertosi spontaneamente, si è addossato il non lieve compito di rivedere tutte le bozze di stampa di questo secondo volume.

Voglio augurarmi che il penoso lavoro da me durato per condurre a compimento quest'Opera, possa essere utile, e non sia stato durato indarno; e spero poi che il lettore vorrà essere indulgente nel giudicarmi, e che vorrà perdonare qualche menda nella quale per avventura, avrò potuto incorrere, e ciò specialmente considerando che quest'Opera, nella quale trovan posto tutte le più svariate parti delle matematiche pure, non è il risultato della collaborazione di molti e diversi intelletti, ma del lavoro di un intelletto solo.

Pavia, 31 agosto 1899.

Ernesto Pascal.

PARTE II.

GEOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

La geometria delle forme continue fondamentali.

§ 1. — Definizioni e concetti introduttori.

Si indicano col nome di *forme geometriche fondamentali di* 1.ª *specie* le seguenti tre figure geometriche:

1. *La retta punteggiata*, cioè l'assieme di tutti i punti *(elementi della forma)* situati su di una retta, che si chiama *sostegno della punteggiata.*

2. *Il fascio di rette*, cioè l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per un punto *(sostegno o centro del fascio).*

3. *Il fascio di piani*, cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per una retta *(sostegno o asse del fascio.)*

Si indicano col nome di *forme geometriche di* 2.ª *specie* le seguenti quattro figure geometriche:

1. *Il piano punteggiato*, cioè l'assieme di tutti i punti di un piano.

2. *Il piano rigato*, cioè l'assieme di tutte le rette di un piano.

3. *La stella di rette*, cioè l'insieme di tutte le rette dello spazio passanti per un punto.

4. *La stella di piani*, cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per un punto.

Si chiamano poi infine *forme geometriche di* 3.ª *specie* le seguenti:

1. *Lo spazio punteggiato*, cioè l'insieme di tutti i punti dello spazio.

2. *Lo spazio di piani*, cioè l'insieme di tutti i piani dello spazio.

Per brevità suole poi anche indicarsi col nome di *sistema piano* l'assieme del piano punteggiato e del piano rigato; col nome di *stella* l'assieme delle due stelle, di rette e di piani; e col nome di *spazio* l'assieme delle due forme di 3.ª specie.

Data una forma geometrica di 1.ª *specie si può stabilire una corrispondenza fra i suoi elementi e i numeri della serie naturale in modo che ad ogni elemento corrisponda un solo numero, e ad ogni numero corrisponda uno e uno solo elemento, e in modo inoltre, che, fissato un numero N e l'elemento corrispondente a, data una quantità σ piccola a piacere, si possa sempre trovare un' altra quantità τ tale che per* TUTTI *i numeri compresi fra N e $N+\tau$, gli elementi corrispondenti abbiano una distanza da a (se si tratti di punteggiata) o facciano un angolo con a (se si tratti di fasci) minore di σ*. Per queste due proprietà la corrispondenza si dice *biunivoca e continua*.

Data una forma geometrica di 2.ª *o* 3.ª *specie si può similmente stabilire una corrispondenza* BIUNIVOCA *e* CONTINUA *fra i suoi elementi e le coppie ovvero rispett. le terne di numeri naturali. (Dando per " corrispondenza continua „ una definizione*

analoga a quella data sopra per il caso delle forme di 1.ª specie.)

Questi numeri che in siffatto modo corrispondono all'elemento della forma data si indicano col nome di *coordinate degli elementi della forma stessa.*

Le forme di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie sono rispettivamente forme ad una, due, tre coordinate.

Si suol dire anche che le forme di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie sono rispettivamente *ad una, due, tre dimensioni*, o anche che esse contengono rispettivamente ∞^1, ∞^2, ∞^3 elementi.

Proiettare da un centro fisso (centro di proiezione) una figura composta di punti e rette, significa costruire le rette che passano per il centro e per i punti della figura, e i piani che passano per il centro fisso e per le rette della figura.

Proiettare da una retta fissa (asse di proiezione) una figura composta di punti, significa costruire i piani passanti per la retta fissa e per ciascuno dei punti dati.

Segare con un piano una figura composta di piani e rette, significa costruire le intersezioni del piano segante coi piani e colle rette date.

Segare con una retta una figura composta di piani significa costruire le intersezioni della retta con tutti i piani della figura.

Le forme geometriche della stessa specie si deducono l'una dall'altra mediante proiezioni e sezioni.

Nella geometria moderna ha grande importanza lo studio delle corrispondenze fra le figure o fra le forme geometriche, nell'intento di ricavare le

proprietà di una figura da quelle di una figura ad essa corrispondente.

Una corrispondenza può essere *biunivoca* o no. È *biunivoca* quando ad un elemento di una delle due forme corrisponde uno e un solo elemento dell'altra, e viceversa.

Le due forme messe in corrispondenza possono anche essere *sovrapposte* cioè avere *il medesimo sostegno.* In tal caso la corrispondenza può essere tale che ad un elemento corrisponda sempre il medesimo altro elemento, sia che il primo si consideri appartenente ad una forma, sia che si consideri appartenente all'altra; una siffatta corrispondenza si chiama *involutoria;* si dice anche che *allora gli elementi si corrispondono in doppio modo.*

Fra le più semplici corrispondenze sono da notarsi la *proiettività*, detta anche *collinearità o omografia*; (di cui son casi particolari la *omologia*, e la *prospettività*) e la *dualità* detta anche *correlazione* o *reciprocità.*

Due forme geometriche fondamentali si dicono *riferite proiettivamente*, *o in corrispondenza proiettiva*, *o* semplicemente *proiettive*, se fra i loro elementi può stabilirsi una tal corrispondenza che l'una può dedursi dall'altra, mediante un numero finito di proiezioni o sezioni. In luogo della denominazione *forme proiettive* si può anche adoperare l'altra di *forme omografiche* o *collineari.* Questa definizione non vale per forme di 3.ª specie. Per queste può valere la seguente altra:

Due forme di 2.ª o 3.ª specie si dicono *proiettive* se i loro elementi di medesima specie si corrispondono biunivocamente, e in modo che ad ele-

menti che si appartengono corrispondono anche elementi che si appartengono.

Due forme proiettive ad una terza sono anche proiettive fra loro.

Due forme fondamentali sono *prospettive* nei seguenti casi:

a) Due punteggiate, se sono sezioni di uno stesso fascio di raggi;

b) Due fasci di piani, se proiettano da due centri diversi uno stesso fascio di raggi;

c) Due fasci di raggi, se proiettano una stessa punteggiata da due centri diversi, o sono sezioni di uno stesso fascio di piani;

d) Una punteggiata e un fascio di raggi (o di piani), ovvero un fascio di raggi e uno di piani, se la prima forma è una sezione della seconda;

e) Due piani punteggiati o rigati, se sono sezioni di una stessa stella;

f) Due stelle, se proiettano da due centri diversi un medesimo piano punteggiato o rigato;

g) Un piano punteggiato o rigato e una stella, se la prima forma è una sezione della seconda.

Due sistemi piani sovrapposti si dicono *omologici* se sono sezioni di due stelle prospettive; e due stelle col medesimo centro si dicono *omologiche* se proiettano da un centro due sistemi piani prospettivi.

Due sistemi piani si dicono *duali*, *reciproci*, o *correlativi* se i punti dell'uno corrispondono biunivocamente alle rette dell'altro, e viceversa, e in modo che ad elementi che si appartengano corrispondano anche elementi che si appartengono.

Due spazi si dicono *duali*, *reciproci* o *correlativi* se i *punti*, le *rette* e i *piani* dell'uno corrispondono biunivocamente e rispett. ai *piani*, alle *rette* e ai *punti* dell'altro, e in modo che ad elementi che si appartengano corrispondano anche elementi che si appartengono.

Si dice *proprietà proiettiva di una figura* quella che si conserva quando alla figura se ne sostituisce un'altra ad essa *proiettiva*. Una proprietà dipendente essenzialmente da misure di distanze, angoli, aree, ecc. si dice *proprietà metrica*.

Alcune proprietà metriche possono anche essere proiettive.

Si dice poi *proprietà grafica o descrittiva o di posizione* una proprietà che si riferisce esclusivamente alla posizione degli elementi di una figura (come il passare una linea o superficie per certi punti, o l'avere più linee o superficie certi punti comuni o linee comuni, ecc.) e da cui è eliminata ogni qualsiasi idea di *quantità*.

Ogni proprietà grafica è sempre proiettiva.

Le proprietà grafiche delle figure sono sottoposte ancora alla legge che si chiama *principio di dualità o di correlazione nel piano e nello spazio:*

Ogni teorema esprimente una proprietà grafica di una figura piana, continua a sussistere se mutiamo dappertutto gli elementi RETTA *e* PUNTO *negli elementi* PUNTO *e* RETTA, *e sostituiamo ad elementi che si appartengano ancora elementi che si appartengano.*

Ogni teorema esprimente una proprietà grafica di una figura solida continua a sussistere se mutiamo dappertutto gli elementi PUNTO *e* PIANO *negli*

elementi PIANO *e* PUNTO, *e lasciamo inalterato l'elemento* RETTA, *e sostituiamo ad elementi che si appartengono ancora elementi che si appartengano.*

Le due operazioni del proiettare da un centro (o da un asse) e del segare con un piano (o con una retta) sono due operazioni duali nello spazio; come le altre due del proiettare da un centro in un piano e del segare con una retta in un piano, sono operazioni duali nel piano.

Due forme geometriche correlative ad una terza sono proiettive fra loro.

Una dualità di due forme sovrapposte (aventi il medesimo sostegno) può essere anche involutoria e allora si dice *polarità.*

Il *principio di polarità* non è dunque che un caso particolare di quello di *dualità.*

Secondo il principio di dualità ad una curva piana, considerata come luogo di punti, ne corrisponde un'altra considerata come inviluppi di tangenti, cioè ai punti di una curva corrispondono le tangenti di un'altra.

È fondamentale nella geometria il concetto di *elemento all' infinito.*

Si dice che:

tutte le rette parallele in un piano, si incontrano in un punto a distanza infinita;

in un piano vi sono tanti punti a distanza infinita quante sono le possibili direzioni di una retta in quel piano;

tutti questi punti stanno su di una retta; la retta all' infinito di quel piano;

tutti i piani paralleli dello spazio si incontrano in una retta a distanza infinita;

tutte le rette a distanza infinita dello spazio, come anche tutti i punti a distanza infinita, stanno tutti in un piano che si chiama, il piano all'infinito dello spazio.

Nel capitolo seguente si tratterà delle *forme discontinue.* Intanto per intendere le cose contenute nei seguenti paragrafi occorre conoscere le seguenti definizioni del quadrangolo e quadrilatero completo.

Si dice *quadrangolo piano completo* la figura formata da quattro punti *(vertici)* di un piano, (di cui tre non sieno mai su di una retta) e dalle 6 rette *(lati)* che congiungono a due a due questi punti; i tre punti d'incontro dei lati opposti (cioè quei lati che non si incontrano in uno dei vertici dati) formano un triangolo che si chiama *triangolo diagonale.*

Si dice *quadrilatero piano completo* la figura formata da quattro rette *(lati)* di un piano, (di cui tre non passino mai per un punto) e dai 6 punti *(vertici)* in cui questi lati si incontrano a due a due; le tre rette che congiungono i vertici opposti (vertici non situati sullo stesso lato) formano il cosiddetto *trilatero diagonale.*

§ 2. — La geometria delle forme di 1.ª specie.

1. *La retta punteggiata.* — Una retta può essere percorsa da un suo punto in due direzioni; una di queste direzioni si chiami *direzione positiva*, e l'altra *negativa.* Ogni segmento della retta abbia il segno + o — secondochè è percorso in direzione positiva o negativa.

Colla notazione $A\,B$ intendiamo il numero che misura il segmento che va da A sino a B. Per modo che $A\,B = -B\,A$.

Fra i segmenti determinati da tre punti di una retta si ha la relazione:

$$A\,B + B\,C + C\,A = 0.$$

Fra i segmenti determinati da quattro punti A, B, C, D *di una retta si ha la relazione*

$$A\,B\,.\,C\,D + A\,C\,.\,D\,B + A\,D\,.\,B\,C = 0.$$

Chiamando $\delta_{12}\,\delta_{13}\ldots$ le distanze dei punti

$$1,\ 2,\ 3,\ldots$$

fra le distanze di tre punti in linea retta si ha la relazione (sotto forma di determinante)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 \\ 1 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 \\ 1 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si dice che quattro punti A, B, C, D su di una retta sono *armonici*, quando fra i segmenti da essi

limitati sussiste la relazione

$$\frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}$$

ovvero

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$$

ovvero

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}.$$

Indicando con M il punto medio del segmento AB, *si ha anche*

$$MC\cdot MD=\overline{MA}^2.$$

I punti A e B si dicono *coniugati armonici*, come anche C e D.

Geometricamente: I quattro punti A, B, C, D si diranno *armonici* se si può costruire un quadrangolo completo tale che due lati opposti concorrono in A, due altri lati opposti in B, un quinto lato passi per C e il sesto opposto a questo, passi per D. *Se di tali quadrangoli se ne può costruire uno, se ne potranno costruire infiniti.*

Se quattro punti armonici si proiettano da un centro su di un'altra retta, si hanno ancora quattro punti armonici.

Dati tre punti A, B, C e dato l'ordine con cui dèvono essere considerati, è determinato in modo unico un quarto punto D che sia con essi in ar-

monia, che sia cioè coniugato armonico di C rispetto alla coppia A, B.

Se A B C D è una forma armonica, sono anche armoniche le forme B A C D, A B D C, B A D C.

Nella forma armonica A B C D, i punti coniugati A, B sono necessariamente SEPARATI *dagli altri due C, D.*

In un quadrilatero completo ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due.

Dati quattro punti A, B, C, D su di una retta il rapporto delle distanze

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

si dice *doppio rapporto o rapporto anarmonico o birapporto* dei quattro punti, e si indica col simbolo $(A\,B\,C\,D)$.

Un doppio rapporto non si altera se si scambiano fra loro due punti, e fra loro anche gli altri due.

Permutando i quattro punti fra loro in tutti i 24 modi possibili, il doppio rapporto assume solo 6 valori diversi, che si esprimono poi in modo semplice mediante uno solo di essi.

Se λ *è il doppio rapporto* $(A\,B\,C\,D)$, *tali sei valori sono*

$$(A\,B\,C\,D) = \lambda$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(A\,C\,B\,D) = 1 - \lambda$$

$$(A\,C\,D\,B) = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$(A\,D\,B\,C) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,.$$

Se due dei quattro punti coincidono, il loro doppio rapporto acquista uno dei valori 0, 1, ∞.

Se i quattro punti sono armonici, il loro doppio rapporto acquista uno dei valori -1, $\frac{1}{2}$, 2.

I sei rapporti anarmonici di quattro punti REALI *sono in generale disuguali, almenochè non si tratti di uno dei due casi precedenti, in cui essi sono eguali a due a due, e quindi i sei rapporti si riducono allora a soli tre distinti.*

Se uno dei punti va all'infinito, il doppio rapporto diventa

$$(A\,B\,C\,\infty) = \frac{A\,C}{B\,C}\,.$$

Se il doppio rapporto $(A\,B\,C\,D)$ *è eguale ad r si ha*

$$\frac{r-1}{A\,B} = \frac{r}{A\,C} - \frac{r}{A\,D} \qquad \text{(Möbius.)}$$

Si fissi sulla retta un punto *O (origine)*, si stabilisca la direzione positiva e si fissi un'unità di misura. Ogni punto A della retta può determinarsi allora mediante il numero che misura la di-

stanza di esso dall'origine, avendo cura di considerare positivo o negativo tal numero secondochè il segmento OA è positivo o negativo.

Il numero positivo o negativo, che corrisponde in tal maniera al punto A si dice *coordinata ordinaria o ascissa* di A.

Supponiamo invece fissati due punti A, B, e dato un altro punto C. Il rapporto

$$\frac{AC}{CB} = r$$

si chiama *coordinata baricentrica del punto* C.

La coordinata baricentrica del punto all' infinito della retta è -1.

Fissati tre punti ABC della retta, si può assumere come *coordinata* di un qualunque punto D della retta, il doppio rapporto $(ABCD)$. Questa coordinata si suol chiamare *proiettiva*. I punti A, B hanno allora per coordinate ∞ e 0 e si dicono *punti fondamentali*; il punto C ha per coordinata 1 e si dice *punto unità*.

Questo sistema di coordinate ha per caso particolare quello delle coordinate ordinarie; basta supporre A all'infinito, B origine delle coordinate, e C situato alla distanza $+1$ da B.

Cioè: *la distanza di due punti è eguale al rapporto anarmonico della quaterna formata dai due punti, dal punto all' infinito e dal punto unità.*

Se invece C è medio fra i punti A, B, allora *le coordinate proiettive, diventano le coordinate baricentriche.*

Passiamo ora a dire qualche cosa sulle *coordinate omogenee* dei punti di una retta.

Supponiamo fissato sulla retta un qualunque sistema di coordinate; sia x la coordinata di un punto P e poniamola sotto la forma

$$x = \frac{x_1}{x_2};$$

le quantità x_1, x_2, il cui rapporto determina la coordinata di P si chiamano *coordinate omogenee* di P.

Fra i sistemi di coordinate omogenee è notevole il seguente:

Supponiamo assegnati due punti (fondamentali) A, B, e chiamate p, q le distanze di un punto P dai due punti A, B, per modo che $p + q = AB$; fissate indi due costanti a, b, poniamo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{bp}{aq},$$

allora ad ogni punto P corrisponderà una coppia di valori $x_1 x_2$ il cui rapporto è costante, e ad ogni siffatta coppia di valori, corrisponderà un UNICO *punto P.* Le quantità $x_1 x_2$ possono assumersi perciò come *coordinate omogenee* del punto della retta; ad $x_1 = 0$ corrisponde il punto A, e ad $x_2 = 0$ corrisponde il punto B; il punto all'infinito ha per coordinate $x_1 \equiv -b$, $x_2 \equiv a$. Il punto U per cui $\frac{x_1}{x_2} = 1$ cioè il punto per cui $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ si chiama il *punto unità.*

Questo sistema di coord. omog. ha come caso particolare il sistema di coord. ordinarie (ascisse) NON *omogenee;* basta perciò supporre che B si al-

lontani all'infinito; resta allora inutile considerare la coordinata x_2 perchè q è sempre infinito, e la posizione del punto è determinata solo da x_1 cioè dalla distanza di esso da A.

È facile inoltre vedere che il rapporto $\frac{x_1}{x_2}$, potendosi scrivere $\frac{b}{a} : \frac{q}{p}$, $\left(\text{ed essendo } \frac{b}{a} \text{ il rapporto delle distanze del punto unità } U \text{ dai punti } B, A\right)$ non è altro che il doppio rapporto dei punti $B\,A\,U\,P$. Quindi in fondo il sistema che abbiamo sviluppato non è altro che quello che si ottiene ponendo sotto forma omogenea, al solito modo, la *coordinata proiettiva*; esso è perciò *un sistema di coordinate omogenee proiettive*.

Facendo assumere alla coordinata dei punti di una retta, anche i valori immaginari, possiamo immaginare introdotti degli enti che chiameremo i *punti immaginari della retta*.

In coordinate ordinarie il doppio rapporto di quattro punti si esprime colla formola

$$\frac{(x - x'')}{(x' - x'')} : \frac{(x - x''')}{(x' - x''')}$$

se le x sono le ascisse dei quattro punti dati.

Con questa formola può allora calcolarsi il doppio rapporto anche di punti immaginari della retta.

Estendendo così il concetto di doppio rapporto si trova anche un altro caso, oltre quei due sopra enumerati, nei quali *i sei doppi rapporti di quat-*

tro elementi non sono tutti distinti, e quest'altro caso si ha *quando il valore di uno dei doppi rapporti è una radice cubica complessa dell'unità negativa.* Allora i quattro punti si dicono *equianarmonici* e *i sei doppi rapporti si riducono a soli due distinti.*

Si dice che un'equazione algebrica in x di grado n, *rappresenta un gruppo di n punti su di una retta*; con ciò si intende dire che si immagina risoluta l'equazione, e si interpretano come coordinate di n punti (reali o complessi) di una retta, le n radici di quella equazione.

Due punteggiate sono PROIETTIVE (v. § 1) *(o anche* OMOGRAFICHE *o* COLLINEARI) *quando ad ogni punto dell'una corrisponde uno e un solo punto dell'altra, e il doppio rapporto dei quattro punti dell'una è sempre eguale al doppio rapporto dei quattro punti corrispondenti dell'altra.*

Questa proprietà potrebbe anche servire a fondamento per la definizione di *punteggiate proiettive.*

Un'altra definizione può essere la seguente (di STAUDT):

Due punteggiate sono dette proiettive o riferite proiettivamente, quando sono riferite fra loro in modo che a gruppi armonici nell'una corrispondano gruppi armonici nell'altra.

Il punto corrispondente in una punteggiata, al punto all'infinito dell'altra, si dice *punto di fuga o punto limite.*

Se i due punti di fuga sono anche all'infinito le due punteggiate si dicono *simili.*

La definizione della proiettività può anche darsi nel seguente modo:

Due punteggiate si dicono proiettive quando si corrispondono in modo che dai punti dell' una si passi a quelli dell' altra con un numero finito di proiezioni e sezioni.

La corrispondenza è determinata se sono fissate ad arbitrio tre coppie di punti corrispondenti.

Se x e y sono le coordinate ordinarie dei punti di una punteggiata e dell'altra, una relazione bilineare del tipo

$$a\,x\,y + b\,x + c\,y + d = 0$$

è la relazione che deve sussistere fra x e y, perchè le due punteggiate sieno proiettive (equazione della proiettività).

Se I' e J sono i punti di fuga di due punteggiate proiettive, e $A\,A'$ due punti corrispondenti, il prodotto $J\,A\,.\,I'\,A'$ è costante, qualunque sia la coppia A, A'.

In due punteggiate simili, è costante il rapporto fra i segmenti corrispondenti (rapporto di simiglianza).

Se questo rapporto è ± 1 le due punteggiate si dicono *congruenti o eguali.*

Se due punteggiate proiettive, a sostegni distinti, hanno un punto unito (cioè un punto che ha per corrispondente sè stesso) esse sono prospettive (v. § 1).

Date tre coppie $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$ di elementi corrispondenti in due punteggiate proiettive, per costruire le altre coppie, cioè, come si dice, *per costruire la proiettività*, si può procedere così: *Sulla*

retta che unisce due punti corrispondenti p. es. $A\,A'$ *si prendano due centri* S, S'; *si conducano* $S\,B$, $S'\,B'$ *che si incontrino in* B''; *indi* $S\,C$, $S'\,C'$ *che si incontrino in* C'', *e si congiunga* $B''\,C''$; *da un punto* D *della prima punteggiata, colla proiezione da* S *si ottenga* D'' *su* $B''\,C''$; *si proietti indi* D'' *da* S' *e nell'incontro colla seconda retta si avrà il punto* D' *corrispondente a* D.

Se le due punteggiate sono sovrapposte, si proietti una di esse da un centro su di un'altra retta, indi si operi come precedentemente.

Se si scelgono $S\,S'$ nei punti $A'\,A$, la retta $B''\,C''$ che si ottiene si dice *asse di proiettività o di omografia.*

Essa taglia le due punteggiate nei punti che corrispondono al loro punto comune. Per una proprietà di quest'asse v. pag. 27.

Se i sostegni delle due punteggiate omografiche sono la medesima retta, le due punteggiate si dicono *sovrapposte.*

Due punteggiate omografiche sovrapposte, se non sono coincidenti (cioè se tutti i loro elementi non sono uniti) possono avere al massimo due punti UNITI *reali. La equazione*

$$a\,x^2 + (b + c)\,x + d = 0$$

ha per radici le coordinate di tali punti.

I punti uniti si chiamano anche *punti doppi o fuochi.*

Se le radici di questa equazione sono immaginarie, noi diremo che esistono anche allora i due punti uniti, *ma sono immaginari.*

Il punto medio del segmento limitato dai punti uniti coincide con quello del segmento limitato dai due punti di fuga.

In due punteggiate omografiche sovrapposte è costante il doppio rapporto di due punti corrispondenti qualunque coi due punti uniti.

La corrispondenza fra tali due punteggiate è involutoria, (cioè ad un punto corrisponde sempre un medesimo altro punto) solo quando tale doppio rapporto ha per valore $+1$ *o* -1.

Nel primo caso le due punteggiate sono *identiche*, e nel secondo caso formano *una omografia involutoria* o semplicemente *una involuzione* (DESARGUES).

Analiticamente, una involuzione è determinata da una equazione del tipo

$$a\,x\,y + b\,(x+y) + d = 0.$$

I punti uniti dell'involuzione sono dati dalla equazione

$$a\,x^2 + 2\,b\,x + d = 0.$$

Se i coefficienti a, b, d sono reali, secondochè i punti uniti sono *reali, immaginari, o coincidenti, l'involuzione si dirà iperbolica, ellittica, parabolica.*

Nel caso dell'involuzione i due punti limiti coincidono in un unico punto detto centro dell'involuzione, e che è il punto medio del segmento determinato dai due punti uniti.

Se in due punteggiate omografiche sovrapposte vi sono due punti distinti i quali si corrispondono in doppio modo (v. § 1), *lo stesso accadrà per due*

punti corrispondenti qualunque, e si avrà l'involuzione.

Se O è centro dell'involuzione, e $A\, A'$ sono due punti corrispondenti sarà sempre

$$O\,A\,.\,O\,A' = \text{cost}.$$

Una involuzione è determinata da due coppie di punti corrispondenti $A\,A'$, $B\,B'$.

Date le coppie $A\,A'$, $B\,B'$, di punti corrispondenti, per costruire l'involuzione si procede così: assumasi un punto arbitrario G fuori della retta e descrivansi i cerchi $G\,A\,A'$, $G\,B\,B'$, che si segheranno in un altro punto H. Il punto O in cui la retta data incontra $G\,H$ è il centro dell'involuzione, e ogni circolo descritto per $G\,H$ incontra la retta data in due punti corrispondenti dell'involuzione.

Se $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$ sono coppie di punti in involuzione si ha fra i segmenti che questi punti determinano sulla retta, la relazione

$$A\,B'\,.\,B\,C'\,.\,C\,A' + A'\,B\,.\,B'\,C\,.\,C'\,A = 0.$$

Se $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$ sono le coordinate di $A\,A'$, $B\,B'$, la equazione dell'involuzione è

$$\begin{vmatrix} x\,y & x + y & 1 \\ x_1\,y_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ x_2\,y_2 & x_2 + y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se $f_1(x) = 0$ è l'equazione di 2.° grado avente per radici $x_1\,y_1$, e $f_2(x) = 0$ è quella che ha per radici $x_2\,y_2$, l'equazione dell'involuzione è

$$f_1(x) + \lambda\,f_2(x) = 0.$$

Se un angolo retto ruota intorno al suo vertice nel proprio piano, i suoi lati descrivono su di una retta. due punteggiate in involuzione.

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale arbitraria in tre coppie di punti coniugati in involuzione.

I sei punti che si ottengono proiettando da un centro arbitrario su di una retta, le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, sono accoppiati in involuzione.

Se due punteggiate omografiche sovrapposte hanno $A\,A'$, $B\,B'$ per coppie di elementi corrispondenti, ed E, F per due punti uniti (distinti o no) saranno E, F; A, B'; B, A' tre coppie di punti coniugati in una involuzione.

Una proiettività di punteggiate sovrapposte può essere *ciclica di ordine n*, cioè tale che se di un punto A si cerchi il corrispondente A', indi di A', considerato come appartenente anche alla prima punteggiata, si cerchi ancora il corrispondente A'', e così di seguito, dopo n di siffatte operazioni si giunge ad ottenere sempre daccapo il punto A.

L'involuzione è una proiettività ciclica di 2.° ordine.

Prendendo i punti uniti come punti fondamentali di coordinate proiettive (non omogenee), la equazione della proiettività ciclica di ordine n può scriversi $y - \varepsilon x = 0$ dove ε è una radice primitiva n^{ma} dell'unità.

Le proiettività cicliche ebbero questo nome dal Clebsch (*Crelle,* LXVIII); se ne erano occupati prima Möbius (*Werke*, II) e Battaglini (*Accad.*

Napoli, 1863) che le avea chiamate *involuzioni di ordine superiore.*

Per le corrispondenze generali fra due punteggiate sovrapposte (in generale fra due forme fondamentali di 1.ª specie sovrapposte) è importante il seguente teorema detto *principio di corrispondenza di* CHASLES:

Se fra i punti di due punteggiate sovrapposte si stabilisce una corrispondenza tale che ad ogni punto dell'una ne corrispondono m dell'altra, e ad ogni punto dell'altra ne corrispondono n dell'una, vi saranno $m + n$ punti che corrispondono a sè stessi (CHASLES, *Compt. Rend.* 1864, 1866).

2. *Fascio di rette.* — Fissata nel fascio una certa retta *(retta origine)* il fascio può essere descritto facendo rotare questa retta intorno al centro del fascio stesso. La rotazione può avvenire in due sensi; stabiliamo di chiamare rotazione *positiva* quella che avviene in un certo senso, e rotazione *negativa* la opposta. Se a, b sono due rette del fascio, noi intenderemo per *angolo* $(a\, b)$ il più piccolo angolo che deve descrivere il raggio a rotando *nel senso positivo* per andare a coincidere con b. Il numero che misura l'angolo che la retta origine fa con ciascuna retta del fascio, può chiamarsi *coordinata ordinaria o anomalia* della retta del fascio. Per modo che $(b\, a) + (a\, b) = \pi$.

Il *doppio rapporto* di quattro raggi del fascio è quello dei quattro punti in cui il fascio è segato da una trasversale qualunque. *Esso è anche rap-*

presentato da

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\text{sen}\,(a\,c)}{\text{sen}\,(b\,c)} : \frac{\text{sen}\,(a\,d)}{\text{sen}\,(b\,d)}$$

ovvero anche da:

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{C\,A}{C\,B} : \frac{D\,A}{D\,B}$$

dove $C\,A$, $C\,B$, $D\,A$, $D\,B$ sono le distanze di due punti C, D dei raggi c, d, dai raggi a, b.

Ponendo $(a\,b\,c\,d) = r$ si ha

$$\frac{r-1}{\text{tg}\,a\,b} = \frac{r}{\text{tg}\,a\,c} - \frac{r}{\text{tg}\,a\,d} \qquad (\text{Möbius.})$$

Se $(a\,b\,c\,d) = -1$ si dirà che le quattro rette sono *armoniche*.

Quattro raggi $a\,b\,c\,d$ di un fascio sono ARMONICI *se si può costruire un quadrilatero completo in modo che due vertici opposti stanno su a, due opposti su b; un quinto sta su c, e il sesto su d. Se si può costruire uno di tali quadrilateri se ne potranno costruire infiniti.*

Fissati nel fascio due raggi a, b, si può prendere come coordinata di un raggio c il rapporto $\frac{\text{sen}\,(a\,c)}{\text{sen}\,(c\,b)}$; si ha così un sistema di coordinate analogo a quello detto *baricentrico*, nel caso della punteggiata.

Fissati invece nel fascio tre raggi a, b, c si può prendere come coordinata di un raggio d il rap-

porto anarmonico $(a\,b\,c\,d)$; si ha così il sistema di *coordinate proiettive.*

Facendo assumere alla coordinata valori immaginari, si hanno le *rette immaginarie* del fascio (per definizione).

Due fasci di rette sono omografici o collineari o proiettivi (v. § 1) *quando si corrispondono in modo che i rapporti anarmonici di quattro raggi dell'uno è sempre eguale al rapporto anarmonico dei raggi corrispondenti (coniugati) dell'altro.*

Anche qui, come per le punteggiate, si può dire che questa proprietà potrebbe servire alla definizione di fasci proiettivi.

Un' altra definizione può poi anche essere la seguente (di STAUDT): *Due fasci sono proiettivi se si corrispondono in modo che a gruppi armonici nell'uno corrispondono gruppi armonici nell'altro.*

Se i due fasci hanno il medesimo centro (sostegno) allora vi saranno sempre due raggi (reali o immaginari) i quali corrispondono a sè stessi (raggi uniti o doppi).

Se poi la corrispondenza è *involutoria* (senza essere tale che ogni raggio corrisponda a sè stesso) allora si dice che le coppie di raggi corrispondenti formano *una involuzione. Due rette coniugate (corrispondenti) sono allora armoniche con le due rette doppie.*

Come per le punteggiate, anche quì potrebbero poi definirsi *le proiettività cicliche di ordine n.*

Un angolo retto che rota in un piano intorno al proprio vertice descrive coi suoi lati due fasci di raggi in involuzione. I raggi doppi sono immaginari e sono quelli che vanno ai due punti ciclici (v. § 3).

Le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono proiettate da un centro arbitrario per mezzo di tre coppie di raggi coniugati in involuzione.

L'omografia fra due fasci di raggi è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti.

Se due fasci omografici a centri diversi hanno un raggio unito sono prospettivi (v. § 1).

Per costruire l'omografia di due fasci di raggi, assegnate tre coppie $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ di raggi corrispondenti, si proceda in modo correlativo a quello seguito pel caso di due punteggiate. *Pel punto comune a due raggi corrispondenti* a, a' *si conducano due rette* s, s', *e sia* b'' *la retta che congiunge i punti* $s\,b$, $s'\,b'$, *e* c'' *la retta dei punti* $s\,c$, $s'\,c'$; *il punto* $b''\,c''$ *è il centro di un fascio che sarà prospettivo ad ambedue i fasci dati; dato perciò un raggio* d *del primo fascio, se ne trovi l'incontro con* s; *questo punto d'incontro si congiunga col punto* $(b''\,c'')$ *e di questo raggio si trovi l'incontro con* s'; *la retta che unisce il centro del secondo fascio con questo punto sarà il raggio corrispondente* d'.

Se per s, s' si assumono rispett. le rette a', a, si avrà che le rette congiungenti i punti $a\,b'$, $b\,a'$; $a\,c'$, $c\,a'$; $b\,c'$, $c\,b'$; . . . concorrono in un punto che si chiama *centro di proiettività o di omografia* dei due fasci.

Il centro di proiettività gode della proprietà che ogni retta passante per esso sega i fasci secondo due punteggiate in involuzione, e viceversa ogni retta siffatta passa per quel centro.

L'asse di proiettività di due punteggiate proiet-

tive (pag. 20) gode della proprietà correlativa, che ci esoneriamo dall'enunciare.

Due fasci di raggi si dicono *simili* se (essendo i loro centri all'infinito) una sezione dell'uno è simile ad una sezione dell'altro (v. § 2).

Due fasci di raggi si dicono *eguali* se l'uno non è che l'altro trasportato in altra posizione.

Due fasci eguali sono proiettivi.

3. *Fascio di piani.* — La geometria del fascio di piani non ha niente di sostanzialmente diverso da quello della retta punteggiata e del fascio di rette. Si possono introdurre le stesse nozioni introdotte precedentemente; la nozione di coordinata quella di doppio rapporto, di armonia, di omografia, di involuzione.

§ 3. — Geometria delle forme di 2.ª specie. Piano punteggiato e rigato.

Fra le aree dei triangoli aventi per vertici tre di cinque dati punti A, B, C, D, E del piano, sussiste la relazione

$$ABE . CDE + BCE . ADE + CAE . BDE = 0$$

e similmente per 6 punti del piano si ha

$$ABC.DEF + ACD.BEF + ADB.CEF = BCD.AEF$$

(Monge, Möbius).

Chiamando $\delta_{12}\,\delta_{13}\ldots$ le distanze a due a due di quattro punti $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ di un piano si ha la

relazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{14}^2 & \delta_{24}^2 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{41}^2 & 0 & \delta_{21}^2 & \delta_{31}^2 \\ 1 & \delta_{42}^2 & \delta_{12}^2 & 0 & \delta_{32}^2 \\ 1 & \delta_{43}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{23}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo nel piano segnate due rette *(assi coordinati)* che si incontrino in un punto O detto *origine.* Sieno in un qualunque modo stabiliti su queste due rette due sistemi di coordinate ordinarie come nel § 2, prendendo il punto O come origine in ciascuna. Per ogni punto P del piano passerà una retta parallela alla prima retta e una retta parallela alla seconda; ogni punto del piano si proietterà, con proiezione parallela alla seconda retta, in uno e un solo punto P' della prima, e con proiezione parallela alla prima retta in uno e un solo punto P'' della seconda. Le coordinate di P' e di P'' possono allora prendersi per *coordinate di* P; esse si chiamano *coordinate cartesiane.* Il caso più ovvio e più semplice si ottiene supponendo ortogonali le due rette date, ed eguali le unità di misura colle quali sulle due rette si computano le coordinate di P' e P''. Se si chiamano $x\,y$ le coordinate dei punti della prima retta e della seconda, chiameremo *asse delle* x la prima retta, e *asse delle* y la seconda retta.

Un altro sistema di coordinate pei punti del piano è quello cosiddetto delle *coordinate polari.* Si

fissi nel piano un punto O (polo) e una retta OA uscente da esso, della quale si fissi la direzione positiva (asse polare). Un punto P del piano può essere determinato dalla distanza (sempre positiva) del punto P dal punto O, e dall'ampiezza dell'angolo (positivo o negativo) che la direzione positiva della retta OA deve compiere, girando in senso positivo o negativo (v. § 2. *Fascio di rette*), per andare a sovrapporsi alla retta OP.

Finalmente un altro sistema di coordinate è quello detto *bipolare*. Fissati nel piano due punti O, O' come centri di due fasci; per ogni punto P del piano passa un raggio del primo fascio e un raggio del secondo; le coordinate di tali due raggi in ciascuno dei fasci, possono prendersi come coordinate di P.

Se le due coordinate $x\,y$ di un punto in un piano si pongono sotto la forma $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, le quantità $x_1\,x_2\,x_3$ si dicono *coordinate omogenee* dei punti del piano. Fra i sistemi di coordinate omogenee è notevole quello cosiddetto *trilineare o trimetrico.*

Consideriamo tre rette del piano, non passanti per un punto, e chiamate p, q, r le distanze di un qualunque punto P del piano dalle tre rette, e a, b, c tre costanti qualunque, poniamo $x_1\,x_2\,x_3$ proporzionali ai rapporti

$$\frac{p}{a}, \quad \frac{q}{b}, \quad \frac{r}{c}.$$

Si può far vedere che *in tal maniera ad ogni terna di valori* ρx_1, ρx_2, ρx_3, *(dove* ρ *sia un qua-*

lunque fattore di proporzionalità) corrisponde un UNICO *punto del piano, e viceversa;* dunque le quantità $x_1\, x_2\, x_3$ possono rappresentare un sistema di coordinate omogenee. I vertici $A\ B\ C$ del triangolo formato dalle tre rette hanno per coordinate rispettivamente

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0. \end{array}$$

Il triangolo $A\ B\ C$ si chiama *triangolo fondamentale delle coordinate.*

Esiste nel piano un punto U tale che le sue distanze dalle tre rette sono proporzionali ad a, b, c; le coordinate omogenee di esso sono 1, 1, 1; esso perciò si chiama *punto-unità.*

Il rapporto di due delle coordinate di un punto P, p. es. i rapporti $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ possono rappresentarsi come doppi rapporti di fasci di raggi. Giacchè

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{c}{a} : \frac{r}{p}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{c}{b} : \frac{r}{q};$$

e i secondi membri sono eguali ai doppi rapporti dei quattro raggi dei fasci

$$B\,(A,\ C,\ U,\ P), \text{ e } A\,(B,\ C,\ U,\ P).$$

Quindi il sistema di coordinate qui introdotto è *un sistema di coordinate omogenee proiettive.*

Se U è il centro del circolo iscritto al triangolo fondamentale, le coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ di P sono proporzionali alle distanze del punto P dai tre lati del triangolo fondamentale.

Se uno dei lati del triangolo fondamentale diventa la retta all'infinito del piano, il sistema di coordinate trilineari (omogenee) diventa il sistema di coordinate cartesiane (non omogenee).

Le formole generali per la trasformazione di un sistema di coordinate cartesiane in un altro sistema anche cartesiano sono le seguenti: *Se $(x\, y)$ sono le coord. di un punto, riferite a due assi passanti per un punto O, e facenti un angolo ω fra loro, e $(X\, Y)$ sono le coord. del medesimo punto riferite ad altri due assi passanti per un altro punto O' che ha per coordinate $(a\, b)$ rispetto agli antichi assi, si hanno le relazioni*

$$x = a + X \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \omega} + Y \frac{\operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen} \omega}$$

$$y = b + X \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \omega} + Y \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \omega}$$

dove α, β sono gli angoli che il nuovo asse X fa cogli antichi e α' β' sono gli angoli che il nuovo asse Y fa cogli antichi (essendo

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega).\ *$$

* Per *angoli di assi* si intendono gli angoli che fanno fra loro le direzioni positive di essi.

Il determinante dei coefficienti di X *e* Y *in queste formole ha per valore* $\frac{\text{sen}\,\Omega}{\text{sen}\,\omega}$, *essendo* Ω *l'angolo dei nuovi assi.*

Se ambedue i sistemi di coordinate sono ortogonali, e se α *è l'angolo che il nuovo asse di* X *forma coll'antico asse di* x, *le formole di trasformazione sono semplicemente le seguenti*

$$x = a + X\cos\alpha \pm Y\,\text{sen}\,\alpha$$
$$y = b + X\,\text{sen}\,\alpha \mp Y\cos\alpha.$$

In queste formole bisogna considerare i segni superiori o inferiori secondochè le direzioni positive di Y e y formano fra loro un angolo α o un angolo $\pi - \alpha$.

Le formole di trasformazione di coordinate cartesiane ortogonali in coordinate polari sono:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \text{tg}\,\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \text{sen}\,\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dove ρ, φ *sono le coordinate polari del punto di coordinate cartesiane* $x\,y$, *e dove si suppone che il polo coincida coll'origine delle coordinate, e che l'asse polare coincida coll'asse su cui si contano le* x.

Se $(x\,y)$ $(x'\,y')$ *sono le coordinate cartesiane di due punti, la distanza dei due punti è data, dalla*

formola:

$$\rho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\omega$$

essendo ω *l'angolo che formano fra loro gli assi.*

Se α, β *sono gli angoli che una retta del piano forma cogli assi coordinati si ha la relazione fondamentale*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \operatorname{sen}^2\omega.$$

Se α, β *e* α' β' *sono gli angoli che due rette formano cogli assi coordinati, l'angolo delle due rette è dato dalle formole*

$$\cos(r\,r') = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 1 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{sen}(r\,r') = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

La condizione perchè le due rette sieno ortogonali è

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

e la condizione perchè sieno parallele è

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix} = 0.$$

Se gli assi sono ortogonali, le relazioni prece-

denti diventano

$$\cos(r\,r') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta',$$
$$\text{sen}(r\,r') = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta.$$

Se $(x y)$ $(x' y')$ $(x'' y'')$ sono le coordinate dei tre vertici di un triangolo, l'area di questo è data, in valore assoluto, da

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\omega \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}.$$

La condizione perchè tre punti di coord.

$$(x y)\ (x' y')\ (x'' y'')$$

sieno in linea retta è

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Una equazione fra le coordinate di un punto nel piano, rappresenta *un luogo di punti.*

Fra le coordinate $x\,y$ di un punto appartenente ad una linea retta sussiste una relazione di 1.° grado (equazione della retta) del tipo

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

dove a, b, c sono coefficienti costanti.

L'equazione della retta che passa per due punti di coordinate $(x' y')$, $(x'' y'')$ può scriversi sotto

ciascuna delle forme

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coordinate di un punto che sta sulla retta determinata dai punti $(x'\,y')$ $(x''\,y'')$ *possono scriversi*

$$\left(\frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}\right).$$

I punti

$$\left(\frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}\right) \left(\frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda}, \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}\right)$$

dividono armonicamente il segmento limitato dai punti $(x'\,y')$ $(x''\,y'')$.

Supposti gli assi ortogonali e posta l'equazione della retta sotto la forma

$$y = A\,x + B$$

il coefficiente A *si chiama coefficiente angolare dell'equazione della retta, e rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta fa coll'asse di* x.

Indicando con α, β *gli angoli che la perpendicolare alla retta fa cogli assi coordinati, e con* ρ *la distanza dell'origine delle coordinate dalla retta,*

l'equazione di questa può scriversi

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \rho = 0 \qquad \textit{(equaz. normale).}$$

Per ridurre l'equazione $a x + b y + c = 0$ *alla forma normale, basta dividere i suoi coefficienti per*

$$\frac{\operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}},$$

dove il radicale si prenderà col segno $+$ *o* $-$ *secondochè il prodotto* $c \operatorname{sen} \omega$ *è negativo o positivo.*

Se $a x + b y + c = 0$ *è l'equazione di una retta, gli angoli che essa forma cogli assi sono dati dalle formole (dove* ω *è l'angolo degli assi)*

$$\cos \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}}$$

$$\cos \beta = \frac{b \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}}$$

e la distanza dell'origine dalla retta è data dalla formola

$$\rho = - \frac{c \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}}$$

dove per il segno del radicale vale la medesima osservazione di sopra.

La distanza, di un punto di coordinate $X\ Y$ *da una retta di equazione*

$$a x + b y + c = 0$$

è data dalla formola

$$-\frac{(a\,X + b\,Y + c)\,\text{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\omega}}.$$

dove per il segno del radicale vale l'osservazione come sopra, e tale distanza sarà positiva o negativa secondochè il punto sta, rispetto alla retta, dalla stessa parte dell'origine o da parte opposta.

Le coordinate del punto d'intersezione di due rette

$$a\,x + b\,y + c = 0$$
$$a'\,x + b'\,y + c' = 0$$

sono date dalle formole

$$x = \frac{b\,c' - b'\,c}{a\,b' - a'\,b}, \qquad y = \frac{a'\,c - a\,c'}{a\,b' - a'\,b}.$$

L'angolo φ *compreso fra due rette è dato da*

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{(a\,b' - a'\,b)\,\text{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\omega}\;\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2\,a'\,b'\cos\omega}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a\,a' + b\,b' - (a\,b' + a'\,b)\cos\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\omega}\;\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2\,a'\,b'\cos\omega}}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due rette sieno parallele è

$$a\,b' - a'\,b = 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due rette sieno ortogonali è

$$a\,a' + b\,b' - (a\,b' + a'\,b)\cos\omega = 0.$$

L'equazione della retta che passa pel punto $(x'\,y')$ ed è perpendicolare alla retta

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

è

$$\frac{x - x'}{a - b\cos\omega} = \frac{y - y'}{b - a\cos\omega}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè tre rette di equazioni

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' &= 0 \\ a''\,x + b''\,y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

passino per un medesimo punto è

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

L'area del triangolo limitato dalle tre rette di cui le equazioni sono quelle soprascritte è data da

$$\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{(a\,b' - a'\,b)\,(a'\,b'' - a''\,b')\,(a''\,b - a\,b'')} \operatorname{sen}\omega.$$

Ponendo $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, l'equazione della retta diviene

$$u\,x + v\,y + 1 = 0.$$

Se in questa equazione consideriamo fisse u, v, e variabili x, y, abbiamo una relazione fra le coordinate di ogni punto di una retta; ma se invece consideriamo variabili u, v, e fisse $x\,y$, *abbiamo una relazione cui devono soddisfare le quantità* u, v *corrispondenti a qualunque retta che passi per il punto fisso di coordinate* $x\,y$. Date le quantità u, v si individua una retta; perciò esse si possono chiamare *coordinate della retta.*

Quelle rette le cui coordinate soddisfano ad una stessa equazione lineare, passano tutte per un punto.

Condizione necessaria e sufficiente perchè le tre rette di coordinate $(u\,v)$ $(u'\,v')$ $(u''\,v')$ *passino per un punto è*

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coordinate di una retta che passa per l'intersezione delle due di coordinate $(u'\,v')$ $(u''\,v'')$ *sono del tipo*

$$\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \qquad \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}.$$

Le rette di coordinate

$$\left(\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{u' - \lambda u''}{1 - \lambda}, \frac{v' - \lambda v''}{1 - \lambda}\right)$$

dividono armonicamente l'angolo delle rette

$$(u'\,v')\;(u''\,v'').$$

Una relazione fra le coordinate u, v di rette, rappresenterà in generale un assieme di infinite rette tangenti ad una curva; si dice che rappresenta *un inviluppo*

L'angolo delle due rette (u, v) (u', v') *è dato dalla formola:*

$$\cos\alpha = \frac{u u' + v v'}{\sqrt{u^2 + v^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Sono notevoli i due punti immaginari all'infinito del piano rappresentati dall'equazione (in coordinate di rette) $u^2 + v^2 = 0$. Essi si chiamano i *punti ciclici* perchè *per essi passano tutti i cerchi del piano* (v. il Cap. sulle coniche).

È notevole la seguente definizione proiettiva dell'angolo di due rette, introducendo i punti ciclici del piano:

L'angolo di due rette è eguale al prodotto di $\frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{i}{2}$ *per il rapporto anarmonico della quaterna formata dalle due rette date e dalle altre due rette che vanno ai due punti ciclici* (v. p. es. Clebsch-Lindemann, *Geometr.*, I).

Due sistemi piani (piani punteggiati e rigati) si dicono *omografici* o *collineari* o *proiettivi*, se fra i loro punti e le loro rette (reali) si stabilisce una corrispondenza tale che ad ogni punto corrisponda un punto P' e ad ogni retta p corrisponda una retta p', colla condizione che se P appartiene a p, anche P' appartenga a p'.

Per il caso più generale in cui si vogliano comprendere elementi reali e immaginarii, la definizione analitica per la *omografia* di due sistemi piani è la seguente: chiamate $x\,y$ le coordinate cartesiane di un punto del piano e $x'\,y'$ le coordinate del punto corrispondente del secondo, i due sistemi sono omografici se sussistono le relazioni

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{a''\,x + b''\,y + c''}, \quad y' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{a''\,x + b''\,y + c''}$$

ove il determinante $(a\,b'\,c'')$ è diverso da zero.

Ovvero: chiamate u, v le coordinate di una retta del primo, e $u'\,v'$ le coordinate della retta corrispondente del secondo, i due sistemi sono omografici se sussistono relazioni del tipo

$$u' = \frac{a\,u + b\,v + c}{a''\,u + b''\,v + c''}, \quad v' = \frac{a'\,u + b'\,v + c'}{a'\,u + b''\,v + c'}.$$

Due rette punteggiate corrispondenti o due fasci di rette corrispondenti, contenuti in due sistemi piani omografici, sono sempre proiettivi.

La omografia fra due sistemi piani è determinata quando si stabilisca che ai quattro vertici di un quadrangolo nell'un piano corrispondano i quattro vertici di un quadrangolo nell'altro, ovvero ai quattro lati di un quadrilatero nell'un piano corrispondano i quattro lati di un altro quadrilatero nell'altro.

Due sistemi piani omografici si dicono *affini* quando alla retta all'infinito dell'uno corrisponde la retta all'infinito dell'altro.

Le equazioni dell'affinità sono del tipo

$$x' = a\,x + b\,y + c, \qquad y' = a'\,x + b'\,y + c'.$$

L'affinità è determinata quando si stabilisca la corrispondenza fra tre punti (non in linea retta) dell'un piano e tre punti (non in linea retta) dell'altro; ovvero fra tre rette (non di un fascio) dell'uno, e tre rette dell'altro.

Nella corrispondenza affine due punteggiate corrispondenti sono simili, e il rapporto fra le aree di due triangoli corrispondenti è costante.

Caso particolare dell'affinità è la *simiglianza*. Due sistemi piani si dicono *simili* quando gli angoli corrispondenti sono sempre eguali.

In due sistemi simili il rapporto di simiglianza fra due punteggiate corrispondenti è sempre il medesimo, e i fasci di raggi corrispondenti sono eguali.

Se i due sistemi piani omografici sono sovrapposti, si possono cercare i punti, (o le rette) che corrispondono a sè stessi *(punti uniti o doppi, rette unite o doppie)*.

Esistono in generale tre punti uniti, e tre rette unite, che sono rispettivamente vertici e lati di uno stesso triangolo.

I tre punti uniti si ottengono cercando le radici t dell'equazione cubica

$$\begin{vmatrix} a - t & b & c \\ a' & b' - t & c' \\ a'' & b'' & c'' - t \end{vmatrix} = 0$$

e indi cercando l'unico punto comune alle tre rette di equazioni

$$\begin{aligned} a\ x + b\ y + c &= t\,x \\ a'\ x + b'\ y + c' &= t\,y \\ a''\,x + b''\,y + c'' &= t. \end{aligned}$$

Collo scambio di x, y in u, v si ricaverebbe il procedimento per ottenere le rette unite, se la omografia è scritta in coordinate di rette.

Due sistemi piani ômografici sono *omologici* quando le congiungenti i punti corrispondenti si incontrano in un punto (centro di omologia o di prospettiva). *In tal caso le rette corrispondenti si incontrano in punti di una retta* (asse di omologia). Si potrebbe prendere anche questa seconda proprietà a fondamento della definizione, e allora la prima ne deriverebbe di conseguenza.

La omologia è una omografia nella quale esiste una retta di punti uniti (asse di omologia) e un fascio di rette unite (il cui centro è il centro di omologia).

Se in due sistemi piani omografici, tre punti di una retta hanno per corrispondenti sè stessi, i due sistemi sono omologici.

La omologia ha luogo quando il determinante

$$D = \begin{vmatrix} a - t & b & c \\ a' & b' - t & c' \\ a'' & b'' & c'' - t \end{vmatrix}$$

ha, per un certo valore di t, *eguali a zero, tutti i suoi minori. Quel valore di* t *è allora radice*

doppia o tripla dell'equazione $D = 0$; *in quest'ultimo caso si ha che il centro d'omologia sta sull'asse d'omologia.*

Due sistemi piani omografici (non affini) si possono sempre situare in modo da essere omologici.

Due sistemi piani omologici sono definiti dal centro, dall'asse d'omologia, e da una coppia di punti corrispondenti.

Due sistemi piani omografici e sovrapposti si deducono l'uno dall'altro mediante un numero finito di omologie, come anche mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

Le rette limiti (o di fuga) di due sistemi piani omologici (rette di un piano corrispondenti a quelle all'infinito dell'altro) sono parallele all'asse di omologia.

Una omologia di due sistemi piani sovrapposti si dice *armonica* o *involutoria* quando due punti (e due rette) si corrispondono in doppio modo, cioè ad un punto P corrisponde sempre un medesimo altro punto P', sia che P si immagini appartenente ad un piano, sia che si immagini appartenente all'altro, e così per due rette.

Nell'omologia involutoria, due punti corrispondenti sono separati armonicamente dal centro e dall'asse di omologia (di qui ne viene la denominazione di *armonica), e lo stesso per due rette corrispondenti.*

È importante notare che: *Una omografia (piana) in cui la corrispondenza sia involutoria (nel senso sopraindicato) è necessariamente un'omologia.*

Se l'asse di omologia si suppone all'infinito, i due sistemi piani si dicono *omotetici*. Se anche il centro va all'infinito i due sistemi si dicono *congruenti*.

Nella corrispondenza omotetica le rette limiti coincidono all'infinito.

Nell'omotetia il rapporto di due segmenti rettilinei corrispondenti è costante (rapporto di omotetia).

I sistemi omotetici sono un caso particolare dei sistemi simili.

Un caso più generale della omografia involutoria è la *omografia ciclica di ordine n* per due sistemi piani sovrapposti. Essa è tale che cercando il corrispondente A' di un punto A, indi il corrispondente di A' (considerato come appartenente al primo sistema piano) e così di seguito, dopo n operazioni si giunga di nuovo al punto A.

Adoperando coordinate omogenee per i punti del piano, e scegliendo il triangolo fondamentale coi vertici in tre punti uniti della omografia ciclica di ordine n, le equazioni di questa possono sempre ridursi alla forma

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_1, \qquad x'_2 = \varepsilon_2 x_2, \qquad x'_3 = \varepsilon_3 x_3$$

essendo le ε radici primitive n^{me} dell'unità.

Se gli elementi (reali) di due sistemi piani, sovrapposti o no, si fanno corrispondere in modo che ai punti dell'uno corrispondono le rette dell'altro, e viceversa, e che a punti in linea retta p dell'un piano, corrispondano nell'altro rette passanti per un punto P corrispondente di p, e viceversa, allora i due piani si dicono in *corrispondenza correlativa o duale*, o *reciproca*.

Per il caso più generale in cui vogliano considerarsi elementi reali e immaginarii, la *dualità* è analiticamente definita da relazioni del tipo

$$u' = \frac{a\,x + b\,y + c}{a''\,x + b''\,y + c''}, \quad v' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{a''\,x + b''\,y + c''}$$

dove x, y sono coordinate di punti, e u', v' coordinate di rette, e il determinante $(a\,b'\,c'')$ è diverso da zero.

La dualità è determinata se ai quattro vertici di un quadrangolo si fanno corrispondere i quattro lati di un quadrilatero.

Due sistemi piani correlativi, ad un terzo sono omografici.

Una reciprocità o dualità per due sistemi piani sovrapposti, può essere *involutoria*, cioè tale che ad un punto corrisponda sempre la stessa retta sia che il punto si consideri come appartenente al primo sistema piano, sia che si consideri appartenente al secondo; una siffatta dualità involutoria prende il nome di *polarità.*

Il punto e la retta corrispondenti si chiamano allora rispett. *polo* e *polare.*

Quando una dualità è tale che esista un triangolo ai cui vertici, considerati come punti di uno dei due sistemi piani, corrispondano nell'altro, i lati opposti (triangolo polare, autoreciproco, autoconiugato) essa è una polarità.

In una polarità esistono infiniti triangoli polari.

Una polarità è determinata assegnando un triangolo polare (cioè avente la proprietà indicata nel precedente teorema), e dando la polare di un

punto non situato su alcun lato del triangolo stesso.

In una polarità due punti si dicono *reciproci* se l'uno sta sulla polare dell'altro. E similmente per *due rette reciproche*.

Se la polare di un punto passa per il punto stesso, il punto si dirà *punto unito*, e la sua polare si dirà *retta unita* della polarità.

Analiticamente, la polarità è definita da relazioni simili a quelle della dualità, dove però

$$a' = b, \qquad a'' = c, \qquad b'' = c'$$

Adoperando coordinate omogenee per i punti e le rette del piano, le equazioni della dualità sono

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

e quelle della polarità sono queste stesse dove però $a_{ik} = a_{ki}$.

I punti uniti sono dati dalla relazione

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0$$

(che corrisponde ad una conica).

Se il triangolo fondamentale delle coordinate è polare, questa espressione diventa del tipo

$$\sum a_{ik} x_i^2 = 0.$$

In quanto alla geometria delle altre due forme fondamentali di 2.ª specie cioè la stella di rette e la stella di piani, non crediamo necessario estenderci su essa, e solo osserviamo che le proprietà della stella possono ricavarsi da quelle del sistema

piano, immaginando proiettato questo da un punto situato fuori di esso. Le definizioni di *stelle omografiche* o *proiettive, stelle correlative o reciproche*, ecc. e le proprietà fondamentali di tali corrispondenze sono le analoghe a quelle pei sistemi piani.

§ 4. — Geometria delle forme fondamentali di 3.ª specie.

Lo spazio di punti e di piani.

Fra i tetraedri aventi per vertici quattro di 6 punti dati A, B, C, D, E, F dello spazio, sussiste la relazione:

$$ABEF.CDEF + BCEF.ADEF + \\ + CAEF.BDEF = 0;$$

per sette punti si ha

$$ABCG.DEFG + ACDG.BEFG + \\ + ADBG.CEFG = BCDG.AEFG;$$

e per otto punti si ha infine

$$BCDE.AFGH + ACED.BFGH + ADEB.CFGH + \\ + ABEC.DFGH + ABCD.EFGH = 0$$

(Monge, Möbius).

Indicando con δ_{12}, δ_{13} ... le mutue distanze fra

cinque punti dello spazio si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{51}^2 & \delta_{52}^2 & \delta_{53}^4 & \delta_{54}^2 \\ 1 & \delta_{15}^2 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{14}^2 \\ 1 & \delta_{25}^2 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 & \delta_{24}^2 \\ 1 & \delta_{35}^2 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{45}^2 & \delta_{41}^2 & \delta_{42}^2 & \delta_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa relazione è di LAGRANGE (*Mém. de Berlin*, 1773), il quale la presentò sotto altra forma. Indi se ne occuparono CARNOT in un lavoro speciale (Paris, 1806) e CAYLEY che le dette la forma di determinante (*Camb. math. J.* II).

Di queste relazioni, insieme alle analoghe per la retta e il piano, si sono anche occupati SCHERING (*Gött. Nach.*, 1870), D'OVIDIO (*Giorn. di Batt.*, XI), e più recentemente DE TILLY (*Mém. de Belg.*, 1893) e MANSION (*Société scient. de Bruxelles*, 1895).

Supponiamo nello spazio segnate tre rette *(assi coordinati)* concorrenti in un punto *O (origine)*. Le tre rette determineranno tre piani *(piani coordinati)*, e per ogni punto *P* dello spazio passeranno tre altri piani rispettivamente paralleli ai tre primi.

Considerando le intersezioni di questi cogli assi coordinati, si hanno, su questi, tre punti che possono considerarsi proiezioni del punto dato dello spazio; ad ogni punto dello spazio corrispondono

così tre punti proiezioni, ciascuno in ciascuna delle tre rette date; epperò se in ciascuna di queste stabiliamo un sistema di coordinate per la determinazione dei proprii punti, *le tre coordinate delle tre proiezioni di P potranno assumersi come coordinate di P.* Si ha così il sistema di coordinate che si suol chiamare *cartesiano.*

Il caso più comune è che le coordinate sulle tre rette punteggiate sieno coordinate cartesiane coll'origine comune O, e calcolate colla medesima unità di misura.

Se i tre assi sono ortogonali a due a due, il sistema di coordinate si dice *ortogonale.*

Supponiamo dato un punto O *(polo)*, una retta per esso *(asse polare)* e un piano per questa *(piano polare).*

Ogni punto P dello spazio può essere determinato quando ne sia assegnata la distanza ρ da O, l'angolo θ che la retta OP fa coll'asse polare, e l'angolo φ che misura il diedro compreso fra il piano polare e il piano di P e della retta polare. I tre numeri ρ, θ, φ possono prendersi come coordinate di P; si ha così il *sistema di coordinate polari.* Si può stabilire che ρ debba essere una quantità sempre positiva, e θ debba essere sempre compreso fra 0 e π, mentre φ debba estendersi fra 0 e 2π.

Ponendo le tre coordinate di un punto dello spazio sotto la forma

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

le quantità $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ si dicono *coordinate omogenee.*

Fra i sistemi di queste è notevole quello delle *coordinate quadriplanari o tetrametriche.*

Diamo quattro piani dello spazio formanti un *tetraedro (fondamentale).* Sieno p, q, r, s le distanze di un punto P dai quattro piani, e a, b, c, d, quattro costanti; poniamo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ proporzionali a

$$\frac{p}{a},\quad \frac{q}{b},\quad \frac{r}{c},\quad \frac{s}{d}.$$

I quattro vertici del tetraedro si chiamano *punti fondamentali*, e i quattro piani, *piani fondamentali.* Il punto U di cui tutte le coordinate sono eguali, cioè il punto di cui le distanze dalle quattre facce sono proporzionali ad a, b, c, d, si dice *punto unità.*

Similmente come al § 3 si riconosce che *i rapporti di due qualunque di tali coordinate omogenee sono eguali ai doppi rapporti dei quattro piani di un fascio, che ha per asse uno degli spigoli del tetraedro, e di cui i quattro piani sono: le due facce del tetraedro che passano per quello spigolo, il piano passante per U, e quello passante per P.*

Le coordinate così definite sono dunque *coordinate proiettive.*

Se uno dei piani del tetraedro va all' infinito, il sistema tetrametrico si riduce al sistema cartesiano, come al § 3.

Come pel piano, il primo problema che ci si presenta è quello cosiddetto della *trasformazione*

delle coordinate, cioè la ricerca delle formole mediante le quali le coordinate in un certo sistema si esprimono mediante quelle in un altro sistema.

Se i due sistemi sono ambedue cartesiani le relazioni sono le seguenti:

$$x = \frac{X\cos(Xx') + Y\cos(Yx') + Z\cos(Zx')}{\cos(xx')} + a$$

$$y = \frac{X\cos(Xy') + Y\cos(Yy') + Z\cos(Zy')}{\cos(yy')} + b$$

$$z = \frac{X\cos(Xz') + Y\cos(Yz') + Z\cos(Zz')}{\cos(zz')} + c$$

dove $(x\,y\,z)$ $(X\,Y\,Z)$ *sono le coordinate di un medesimo punto nell'uno e nell'altro sistema,* $(a\,b\,c)$ *sono le coordinate dell'origine del 2.° sistema rispetto al 1.°,* $x'\,y'\,z'$ *rappresentano le rette normali ai piani* $y\,z$, $z\,x$, $x\,y$, *e*

$$\cos(x\,x)\ldots\ \cos(X\,x')\ldots$$

rappresentano i coseni degli angoli formati dalle rette x, x', *ovvero* X *e* x', *etc.*

Per sistemi ortogonali le formole diventano più semplici:

$$x = a + X\cos(Xx) + Y\cos(Yx) + Z\cos(Zx)$$
$$y = b + X\cos(Xy) + Y\cos(Yy) + Z\cos(Zy)$$
$$z = c + X\cos(Xz) + Y\cos(Yz) + Z\cos(Zz).$$

In questo caso fra i nove coseni $\cos(Xx)\ldots$ *sussistono varie relazioni, cioè*

$$\cos^2(Xx) + \cos^2(Xy) + \cos^2(Xz) = 1$$

e le altre cinque che si ricavano da questa collo scambio di X in Y o Z, ovvero collo scambio nelle tre così ottenute di $x\,y\,z$ in $X\,Y\,Z$;

$$\cos(Yx)\cos(Zx)+\cos(Yy)\cos(Zy)+\\ +\cos(Yz)\cos(Zz)=0$$

e le altre due che si ricavano permutando circolarmente X, Y, Z, insieme alle altre tre che si ottengono da quelle così ottenute scambiando $x\,y\,z$ con $X\,Y\,Z$.

Si hanno in tutto 13 relazioni, delle quali solo 6 sono indipendenti.

Le formole colle quali le coordinate polari si esprimono per le cartesiane ortogonali o viceversa sono le seguenti: supponiamo che l'origine delle coordinate cartesiane ortogonali coincida col polo del sistema di coordinate polari, e che l'asse polare coincida coll'asse di z, mentre il piano polare coincida col piano $x\,z$. *Si hanno allora le formole*

$$x=\rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \qquad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$z=\rho\cos\theta \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Nel sistema di coordinate cartesiane, se $(x_1\,y_1\,z_1)$ $(x_2\,y_2\,z_2)$ $(x_3\,y_3\,z_3)$ sono le coordinate di tre punti, le condizioni perchè i tre punti sieno in linea retta sono

$$\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3};$$

le stesse condizioni possono essere espresse dall'annullarsi dei determinanti della matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\| .^*$$

La distanza di un punto di coord. $(x\,y\,z)$ *dall'origine delle coordinate è data dalla formola*

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,y \cos(x\,y) + 2\,y\,z \cos(y\,z) + \\ + 2\,z\,x \cos(z\,x)$$

Fra i coseni degli angoli che una retta r fa coi tre assi sussiste la relazione

$$\left| \begin{matrix} 1 & \cos(r\,x) & \cos(r\,y) & \cos(r\,z) \\ \cos(x\,r) & 1 & \cos(x\,y) & \cos(x\,z) \\ \cos(y\,r) & \cos(y\,x) & 1 & \cos(y\,z) \\ \cos(z\,r) & \cos(z\,x) & \cos(z\,y) & 1 \end{matrix} \right| = 0.$$

Per assi ortogonali si ha semplicemente

$$\cos^2(r\,x) + \cos^2(r\,y) + \cos^2(r\,z) = 1.$$

Per assi ortogonali l'angolo di due rette $r\,r'$ è dato dalle formole

$$\cos(r\,r') = \cos(x\,r)\cos(x\,r') + \cos(y\,r)\cos(y\,r') + \\ + \cos(z\,r)\cos(z\,r')$$

$$\text{sen}^2(r\,r') = \left\| \begin{matrix} \cos(x\,r) & \cos(y\,r) & \cos(z\,r) \\ \cos(x\,r') & \cos(y\,r') & \cos(z\,r') \end{matrix} \right\|^2$$

---

* Basta che se ne annullino due.

L'area A del triangolo formato da tre punti di coordinate $(x_1\, y_1\, z_1)$ $(x_2\, y_2\, z_2)$ $(x_3\, y_3\, z_3)$ è data dalla formola (coord. rettang.)

$$4\,A^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 .$$

Il volume V del tetraedro formato da quattro punti è dato, in valore assoluto, dalla formola (in coord. cartesiane qualunque)

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \cos(x\,y) & \cos(x\,z) \\ \cos(y\,x) & 1 & \cos(y\,z) \\ \cos(z\,x) & \cos(z\,y) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Per assi ortogonali il primo determinante diventa eguale ad 1.

Le coordinate cartesiane $x\,y\,z$ del punto di un piano soddisfanno ad un'equazione di 1.° grado del tipo

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \quad \textit{(equaz. del piano)}$$

e ogni siffatta equazione rappresenta un piano.

La condizione necessaria e sufficiente perchè quattro punti sieno in un piano è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dove i tre primi elementi di ciascuna linea sono le coordinate cartesiane dei quattro punti.

Il piano che passa per i tre punti di coord.

$$(x_1 y_1 z_1)\ (x_2 y_2 z_2)\ (x_3 y_3 z_3)$$

è dato dalla stessa equazione precedente, dove $(x\, y\, z)$ *si suppongono le coordinate di un punto indeterminato del piano (coord. correnti).*

La equazione $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ *è quella del piano che determina sugli assi i segmenti* $p\, q\, r$, *a contare dall' origine.*

Due piani

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono paralleli allora e allora solo che

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Una retta nello spazio è individuata da due equazioni che sono quelle di due piani che passano per essa.

Tre piani appartengono ad un fascio cioè hanno in comune una retta, quando si annullano i determinanti di 3.° ord. della matrice

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{Vmatrix}$$

(basta che se ne annullino due).

Quattro piani passano per un punto quando si annulla il determinante di 4.° ordine dei 16 coefficienti delle equazioni dei quattro piani.

Indicando con $\alpha\, \beta\, \gamma$ *gli angoli che la retta perpendicolare al piano fa cogli assi, e con* ρ *la distanza dell'origine dal piano, l'equazione di questo può scriversi (forma normale)*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \rho = 0.$$

Per assi ortogonali, l'equazione generale di un piano, si riduce a forma normale, moltiplicandola per

$$\frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

dove il radicale va preso col segno contrario a quello del termine noto dell'equazione.

La distanza di un punto X Y Z da un piano si calcola ponendo nel primo membro (cambiato di segno) dell'equazione normale del piano, in luogo delle coordinate correnti, quelle del punto.

L'angolo α *di due piani per assi ortogonali è dato da*

$$\cos \alpha = \frac{a a' + b b' + c c'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

La condizione di ortogonalità di due piani (per assi ortogonali) è:

$$a a' + b b' + c c' = 0.$$

Ponendo l'equazione del piano sotto la forma

$$u\,x + v\,y + w\,z + 1 = 0$$

i coefficienti $u\,v\,w$ possono assumersi come *coordinate del piano.*

Possono allora farsi considerazioni simili a quelle relative alle coordinate di rette nel piano, ma su ciò non ci dilungheremo.

Due spazi (a tre dimensioni) sono *omografici o collineari o proiettivi* se si corrispondono in modo che ad ogni punto e piano (reali) dell'uno corrispondono un punto e piano dell'altro colla condizione che se nel primo spazio il punto appartiene al piano, anche il punto corrispondente appartenga al piano corrispondente; in altri termini se nel primo spazio un punto si muova in un piano, il punto corrispondente nel secondo spazio si muova anche in un piano e questo sia il corrispondente al primo piano.

Le definizioni analitiche (che includono la precedente, e si estendono poi anche al caso di elementi immaginarii) per due spazi omografici sono le seguenti: se $x\,y\,z$ e $x'\,y'\,z'$ sono le coordinate dei punti corrispondenti nei due spazi, questi si diranno *omografici* se sussistono le relazioni

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c\,z + d}{a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''}$$

$$y' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'}{a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''}$$

$$z' = \frac{a'' x + b'' y + c'' z + d''}{a''' x + b''' y + c''' z + d'''}$$

dove il determinante $(a\, b'\, c''\, d''')$ sia diverso da zero.

Ovvero: se $u\, v\, w$, $u'\, v'\, w'$ sono le coordinate di due piani corrispondenti nei due spazi, fra esse sussistano relazioni lineari analoghe alle soprascritte.

Vi sono in generale quattro piani uniti (cioè punti e piani che corrispondono a sè stessi).

La omografia fra due spazi è determinata stabilendo la corrispondenza fra i quattro vertici (o le quattro facce) di un tetraedro nell'uno, e i vertici (o le facce) di un tetraedro nell'altro, e un piano dell'uno spazio, non passante per alcuno dei quattro punti (o un punto non situato in alcuna delle quattro facce) con un piano dell'altro, non passante per alcuno dei quattro punti corrispondenti (ovvero con un punto non situato in alcuna delle quattro facce corrispondenti).

Se i piani all'infinito dei due spazi si corrispondono allora la omografia diventa *affinità*.

L'affinità di due spazi è determinata assegnando la corrispondenza fra quattro facce (o vertici) di un tetraedro nell'uno con quattro facce (o vertici) di un tetraedro nell'altro.

In due spazi affini, due punteggiate corrispondenti sono simili, e due piani corrispondenti sono affini.

In due spazi affini le distanze di due punti corrispondenti, da due piani fissi, hanno un rapporto costante.

In due spazi affini i volumi di due corpi corrispondenti stanno in un rapporto costante.

Caso particolare dell'affinità è la *simiglianza.* Due spazi si dicono *simili* se gli angoli corrispondenti sono sempre eguali. *In due spazi simili due sistemi piani corrispondenti sono anche simili* (v. § 3).

Due spazi omografici che contengono una stella di elementi uniti, ovvero un sistema piano di elementi uniti *(l'una cosa è conseguenza dell'altra),* si dicono *omologici ;* il centro della stella si dice *centro d'omologia*, e il piano si dice *piano d'omologia.* Se la corrispondenza fra i due spazi è involutoria si ha al solito la *omologia involutoria o armonica.*

Due spazi omologici sono definiti mediante il centro, il piano d'omologia e la corrispondenza fra due punti (necessariamente allineati col centro di omologia, e di cui nessuno coincida con esso).

Se il centro va all' infinito, si ha l'*omologia affine ;* se, invece il piano d'omologia va all'infinito si ha l'*omotetia. L'omotetia è un caso particolare della similitudine. Due spazi simili possono sempre situarsi in posizione omotetica.*

È da notarsi anche la *omografia assiale* la quale ha per punti uniti tutti quelli di due rette sghembe (le quali saranno anche inviluppi di piani uniti). *Nella omografia assiale due punti corrispondenti stanno sempre su di una retta che incontra ambedue le rette dei punti uniti, in due punti aventi coi primi un rapporto anarmonico costante.*

Una siffatta omografia è involutoria se tale quaterna di punti è armonica.

Ogni omografia spaziale involutoria può essere o un'omologia involutoria o un'omografia assiale involutoria.

Caso più generale della omografia involutoria è anche qui la *omografia ciclica d'ordine n* per la quale vale la analoga definizione del § preced.

Fra i punti e i piani di uno spazio e i piani e punti di un altro può immaginarsi una corrispondenza biunivoca simile a quella di cui abbiamo trattato nel § 3, e che si chiama *dualità o correlatività o reciprocità.*

In coordinate omogenee di punti e piani, le equazioni della dualità spaziale sono

$$u'_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

La dualità è involutoria in due casi; cioè quando $a_{ik} = a_{ki}$, e quando $a_{ik} = - a_{ki}$, donde $a_{ii} = 0$; nel primo caso si chiama *polarità ordinaria* e nel secondo *polarità nulla o sistema nullo.*

Nella polarità ordinaria il luogo dei punti uniti è una quadrica (v. Cap. V).

In una polarità nulla ogni punto sta nel piano ad esso corrispondente, e ogni piano passa per il proprio polo; e l'assieme delle rette unite è un complesso lineare (v. Cap. XIV, § 3).

Delle *polarità nulle*, o *sistemi nulli* si occuparono prima GIORGINI (*Mem. della Soc. it. delle scienze*, XX, 1827), indi MÖBIUS, CHASLES, v. STAUDT, ecc. (v. Cap. X, § 2).

È utile ora fare cenno delle cosiddette *antiproiettività di* SEGRE.

Sieno x_i le coordinate omogenee dei punti (reali o complessi) di uno spazio (a 2 o a 3 dimensioni) e similmente sieno u_i le coordinate omogenee dell'elemento duale al punto in quello spazio (cioè della retta o del piano secondochè lo spazio è a due o tre dimensioni); indichiamo con $\overline{x_i}$, $\overline{u_i}$ le *quantità complesse coniugate* di x_i, u_i.

Poniamo allora in luogo delle relazioni solite della omografia e della dualità, le altre:

$$x'_i = \sum_k a_{ik} \overline{x_k}$$

$$u'_i = \sum_k a_{ik} \overline{x_k}.$$

Con queste formole restano stabilite due corrispondenze biunivoche fra gli elementi (x, x', ovvero x, u', di due spazi. Per la prima a punti di una retta o di un piano corrispondono anche (come nelle omografie) punti di una retta o di un piano; e per la seconda a punti di una retta o di un piano corrispondono rette o piani di un fascio ovvero piani di una stella (come nelle dualità).

Queste corrispondenze si chiamano rispett. *anticollineazione* (o *antiproiettività)* e *antidualità*.

Per esse si conserva la proprietà che ad elementi armonici corrispondono elementi armonici.

Se queste corrispondenze sono involutorie si hanno le *antiinvoluzioni*, e le *antipolarità*.

La considerazione degli elementi uniti di una antipolarità porta alle cosiddette *iperconiche* e *iperquadriche* rappresentate da un'equazione del

tipo

$$\sum a_{ik}\, x_i\, \overline{x_k} = 0$$

dove sia $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$.

Su queste corrispondenze si possono vedere le quattro note di SEGRE (*Un nuovo campo di ricerche geometriche.* Atti di Torino, 1890), e *Math. Ann.*, XL.)

La prima geometria analitica si può dire essere stata la *Geometria* di DESCARTES comparsa per la prima volta nel 1637; indi comparsa in altre edizioni colle note di DE BEAUNE, e di SCHOOTEN.

In questo libro si introduce in modo sistematico e per la prima volta, il concetto di coordinate nel piano, mentre il concetto di coordinate nella retta punteggiata si può dire che era stato già introdotto da VIETE (1540-1603). Le coordinate baricentriche furono introdotte da MÖBIUS (*Der barycentr. Calcül*, 1827); le proiettive da STAUDT (*Beiträge*, 1858) e da FIEDLER (*Darst. Geom.*), e le coordinate *omogenee* furono estesamente studiate da MÖBIUS, PLÜCKER ed HESSE.

Il concetto di *doppio rapporto* si trova in MÖBIUS (che lo chiamò *rapporto di doppia sezione*) e in CHASLES che lo chiamò *rapporto anarmonico.* Alcuni ora lo chiamano anche *birapporto* (SEGRE). Altre ricerche su esso furono fatte da STEINER, e da STAUDT che lo definì indipendentemente da concetti di grandezze.

Il principio di omologia fu applicato da PONCELET, quello di omografia da MÖBIUS, STEINER,

Chasles, e quello di dualità si deve specialmente a Gergonne (*Ann. des math.*, 1827), Chasles e Plücker.

L'*involuzione* di punti fu studiata (senza contare i geometri greci) fra i moderni per la prima volta da Desargues (1593-1662) a cui si deve anche la denominazione.

La *Geometria proiettiva*, cioè quella che tratta delle proprietà proiettive delle figure, si compose in scienza verso la prima metà di questo secolo. I primi trattati importanti possono ritenersi quelli di Poncelet (*Traité des propr. project. des figures.* Paris, 1822), Steiner (*System. Entwick. der Abhängigkeit geom. Gestalten von einander*, *etc.* Berlin, 1832), Staudt, (*Geom. der Lage.* Nürnberg, 1847), Chasles (*Géom. supér.* Paris, 1852; *Sect. coniq.* Paris, 1865). Fra i più moderni noteremo quello del Cremona (*Elementi di Geometria proiettiva.* 1873), tradotto in varie lingue, l'opera di Reye (*Die Geom. der Lage*, 1877-1880), di Pasch (*Neuere Geom.* 1882), di Weyr (*Project. Geom.* Wien, 1883-87) e le più recenti di Sannia (Napoli, 1891, 1894) e di Enriques (Bologna, 1898).

A queste opere potrebbero aggiungersi quelle di *Geometria Descrittiva*, le quali trattano anche della Proiettiva, per es. le reputate opere di Fiedler (*Darst. Geom.* Leipzig, 1883-88), e di Wiener (*Lehrbuch der Darst. Geom.* Leipzig, 1884). È importante notare che la geometria proiettiva ha preso varii nomi secondo i diversi autori; così fu chiamata *Nuova geometria o geometria superiore* da Chasles, *Geometria di posizione o di situazione (Geom. der Lage)* da Carnot, Cayley,

v. Staudt, Gergonne, etc.; *Geometria proiettiva* da Cremona, Klein, etc.

Assai affine alla Geometria Proiettiva è la cosiddetta *Geometria Descrittiva* il cui scopo è la rappresentazione su di un piano, mediante proiezioni centrali o parallele ortogonali, delle figure solide, e lo studio delle proprietà di tale rappresentazione.

Si deve a Monge (1795) il primo trattato sistematico di geometria descrittiva, la quale si sviluppò appunto nel principio di questo secolo per opera di Monge, Lacroix, Olivier, Hachette, Dupin. Per la storia dettagliata della geometria descrittiva si vegga il primo capitolo della opera (cit.) di Wiener, e un recente libro di Obenrauch (*Gesch. der darst. und proiect. Geom.* Brünn, 1897).

Fra i concetti che hanno servito a dare la maggiore unità, semplicità, e generalità ai risultati geometrici, ed evitare inutili classificazioni di casi di eccezione, sono da annoverarsi quello degli *elementi all'infinito*, e quello degli *elementi immaginarii.* Il primo di essi risale sino a Desargues; il secondo è venuto come conseguenza dell'applicazione dell'analisi alla geometria.

Vari Autori hanno cercato di introdurre quest'ultimo concetto nella geometria pura, e introdurlo, si intende, indipendentemente da concetti analitici. Per ciò fare possono servire le *involuzioni ellittiche* i cui punti uniti, come si sa, sono immaginari, e di cui le coppie di punti reali possono servire perciò ad una definizione di una coppia di punti immaginari. Considerazioni di questo

genere furono fatte principalmente da STAUDT; i trattati moderni di geometria proiettiva (per es. quello sopracitato del SANNIA) sviluppano dettagliatamente questi concetti.

Fra i trattati di *geometria analitica* citeremo quello conosciutissimo del SALMON, di cui si son fatte parecchie edizioni e traduzioni, quello di BALTZER (Leipzig, 1882), quelli vari di HESSE (Leipzig, 1866-76) e quello di D'OVIDIO (Torino, 1885, 1895).

CAPITOLO II.

Geometria delle forme discontinue.

§ 1. — Generalità.

Le forme che consideremo in questo capitolo sono figure composte di punti, rette, piani, in numero finito; esse si sogliono chiamare *forme discontinue* in opposizione alle altre che abbiamo studiate nel Cap. I, perchè evidentemente non si può passare con continuità da un loro elemento ad un altro elemento, passando sempre per elementi della stessa specie tutti contenuti nella forma.

Un gruppo di un numero finito di punti di una punteggiata o di un piano o di uno spazio o un gruppo di un numero finito di rette o di piani di un fascio, ecc. sono *forme discontinue.* Oltre queste vi sono poi le seguenti altre:

Ennagono piano completo è il sistema di n punti *(vertici)* di un piano, tre dei quali non sono mai per diritto, insieme alle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette *(lati)* che li uniscono a due a due.

L'intersezione di due lati non passanti ambedue per uno degli n punti si dice *punto diagonale.*

Il loro numero è $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Ennilatero piano completo è il sistema di n rette *(lati)* di un piano, tre delle quali non concorrono mai in un punto, insieme agli $\frac{n(n-1)}{2}$ punti *(vertici)* secondo cui si segano a due a due. La retta che congiunge due vertici non situati sullo stesso lato si dice *retta diagonale.*

Il loro numero è $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

L'*ennagono* o *ennilatero piano semplice* è il sistema di n punti di un piano considerati in un dato ordine circolare, insieme alle n rette che congiungono ogni punto col successivo.

Proiettando l'ennagono piano completo da un punto fuori del suo piano si ha l'*angolo ennispigolo completo*, e proiettando l'ennilatero da un punto fuori del suo piano, si ha l'*angolo ennaedro completo*.

Ennagono gobbo completo è il sistema di n punti, di cui quattro mai situati in un piano, insieme alle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette che li congiungono a due a due e agli

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$$

piani *(facce)* che li congiungono a tre a tre.

Ennaedro completo è la figura correlativa a questa, cioè il sistema di n piani, di cui mai quattro

passanti per un punto, insieme a tutte le loro rette e punti d'intersezione.

Due ennagoni piani completi riferiti fra loro si dicono *prospettivi* se le congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto, e si dicono anche *omologici* se inoltre i lati corrispondenti si segano in punti di una stessa retta *(asse di omologia)*.

Due ennilateri piani corrispondenti riferiti fra loro si dicono *prospettivi* se i lati corrispondenti concorrono in punti di una stessa retta, e si dicono anche *omologici* se inoltre le congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto *(centro di omologia)*.

Analoghe definizioni possono darsi per due angoli ennaedri e due ennispigoli.

Due ennagoni gobbi completi, riferiti fra loro, si dicono *prospettivi* se le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto e si dicono poi *omologici*, se inoltre le facce corrispondenti si segano in rette di uno stesso piano *(piano d'omologia)*.

Due ennagoni si dicono *proiettivi* se l'uno può dedursi dall'altro mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

Due ennagoni prospettivi situati in piani diversi sono necessariamente omologici. Analogo teor. per due ennaedri prospettivi con centri diversi.

Due triangoli, o due trilateri, o due triedri, o due trispigoli prospettivi sono anche omologici.

Due quadrangoli piani sono sempre proiettivi.

Due quadrangoli gobbi completi prospettivi sono anche omologici.

Se in due ennagoni completi

$$A_1 A_2 \dots A_n, \quad A'_1 A'_2 \dots A'_n,$$

riferiti fra loro e situati in uno stesso piano o in piani diversi, un lato $A_1 A_2$ *del primo e tutti gli altri* $2n-4$ *lati che passano per* A_1 *o* A_2, *concorrono coi lati corrispondenti dell'altro ennagono in altrettanti punti di una retta* s, *i due ennagoni sono omologici; ed indicando con* S *il centro di omologia, due punti diagonali corrispondenti qualunque* P, P' *dei due ennagoni sono allineati con* S.

Analogo teor. per due *ennilateri piani completi*, due *angoli ennaedri completi*, e due *angoli ennispigoli completi.*

Le definizioni di questo paragrafo provengono in gran parte da Steiner (*Op.* I, 288-396).

§ 2. — Proprietà proiettive delle coppie, terne, quaterne di punti su di una retta. Centri armonici. Apolarità. Involuzioni.

Un gruppo di n punti su di una retta può essere analiticamente rappresentato dalle radici di una forma binaria di ordine n. Lo studio degli invarianti e covarianti di tale forma, conduce alla ricerca di speciali proprietà invariantive, o, altrimenti, proiettive del gruppo di punti.

Per i valori $n = 2, 3, 4, \dots$ abbiamo nel volume I, Cap. XII indicati i risultati che si ottengono dal punto di vista della teoria analitica delle

forme. Ora riferiamo i risultati geometrici che corrispondono a quelli analitici allora ottenuti, e perciò intenderemo che si abbiano presenti quei risultati e quelle notazioni e denominazioni.

(Polarità.) Data una forma a_x^n, possiamo formare le polari $a_x^{n-1} a_y, a_x^{n-2} a_y^2, \ldots$ e considerare i i punti radici di queste forme eguagliate a zero, quando si supponga che y sia un punto assegnato. Questi gruppi di punti si chiamano rispettivamente il 1.°, 2.°,... *gruppo polare di y*. Alcuni li chiamano anche *gruppi armonici di y* ovvero *centri armonici* di $n-1^{mo}$, $n-2^{mo}$ ... *grado*. (JONQUIERES, *J. de Liouville*, 1851.) L'ultimo gruppo polare è formato di un punto solo che PONCELET chiamò *centro delle medie armoniche* (*Crelle*, III). Se il polo va all'infinito il centro delle medie armoniche diventa il *centro delle medie distanze* che ha la proprietà che *la somma algebrica delle distanze di esso dagli n punti è zero.*

Indichiamo ora alcune delle fondamentali proprietà dei *centri armonici* o, altrimenti detti, dei *sistemi polari.*

Se M è un centro armonico di grado r di un dato sistema di n punti rispetto al polo O, viceversa O è un centro armonico di grado $n-r$ del medesimo sistema rispetto al polo M.

Se $M_1 M_2 \ldots M_r$ sono i centri armonici di grado r rispetto ad un polo O di un sistema di n punti, i centri armonici di grado s ($s < r$) del sistema $M_1 \ldots M_r$ rispetto al polo O sono anche i centri armonici di grado s del sistema dato rispetto allo stesso polo O.

Se $M_1 \dots M_r$ sono i centri armonici di grado r rispetto ad un polo O_r, e $N_1 \dots N_s$ sono quelli di grado s rispetto ad un polo O_s, i centri armonici di grado $r+s-n$ del sistema $M_1 \dots M_r$ rispetto al polo O_s coincidono coi centri armonici di grado $r+s-n$ del sistema $N_1 \dots N_s$ rispetto al polo O_r.

Se A_1 è il centro armonico di 1.° grado del sistema $A_2 A_3 \dots A_n$ rispetto ad un polo O, esso è anche il centro armonico di 1.° grado del sistema $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ rispetto allo stesso polo.

Se nel sistema $A_1 \dots A_n$, r punti coincidono in uno solo, in questo punto coincideranno $r-p$ centri armonici di grado $n-p$ rispetto ad un polo qualsiasi.

I centri armonici di grado r rispetto ad un punto s^{plo} del sistema dato, preso come polo, si compongono di questo punto contato s volte e dei centri armonici di grado $r-s$ degli altri $n-s$ punti del sistema dato rispetto allo stesso punto.

Se nel sistema dato s punti coincidono in uno, i centri armonici di grado $r<s$ rispetto a questo preso come polo, sono indeterminati.

Le proprietà dei centri armonici sono proiettive.

Se a_x^n (in notazione simbolica) è la forma binaria che eguagliata a zero dà il gruppo di n punti, la forma $H = (a\,b)^2 \, a_x^{n-2} \, b_x^{n-2}$ (dove a, b sono coefficienti simbolici equivalenti) rappresenta il così detto *Hessiano* del gruppo dato. Ora si ha il teorema:

Esiste una forma di grado $2n-4$ i cui punti nulli (gruppo Steineriano) sono quelli i cui gruppi di centri armonici di $n-1^{mo}$ ordine hanno dei

punti doppi, i quali sono dati poi dai punti nulli dell' Hessiano $H = 0$. Questa forma di grado

$$2n - 4$$

è data eliminando z fra

$$a_x a_z^{\,n-2} a_1 = 0$$

e

$$b_x b_z^{\,n-2} b_2 = 0.$$

Vi sono $3n - 6$ poli di cui i gruppi di centri armonici di $n - 1^{mo}$ ordine rispetto alla forma data e di $2n - s^{mo}$ ordine rispetto alla forma Hessiana, hanno un punto comune. — I punti comuni sono dati da (nelle solite notazioni del calcolo simbolico):

$$T = (a\,b)\,(b\,c)^2\,a_x^{\,n-1}\,b_x^{\,n-2}\,c_x^{\,n-3}.$$

L' annullarsi identico della forma Hessiana è condizione necessaria e sufficiente perchè gli n punti del gruppo dato coincidano in uno solo.

(Apolarità.) — Una teoria interessante è quella dell'*apolarità*. Diremo che una forma binaria di ordine n, $a_x^{\,n}$, o un gruppo di n punti, è *apolare* con quella i cui punti sieno $y\,z\,t\ldots$ (in numero di n) quando la polare

$$a_y\,a_z\,a_t\ldots$$

è zero. Le due forme apolari sono allora $a_x^{\,n}$ e

$$(x\,y)\;(x\,z)\;(x\,t)\ldots$$

Questo concetto si trova prima in BATTAGLINI (*Accad. Napoli*, 1864-68) il quale lo estese anche alle forme ternarie; indi fu svolto e felicemente applicato da ROSANES (*Crelle*, LXXV, LXXVI, *Math. Ann.*, VI) e da REYE (*Math. Ann.*, IV), il quale ultimo introdusse il nome di *apolarità;* il BATTAGLINI aveva chiamato le due forme *coniugate armoniche* considerando l'apolarità come generalizzazione dell'armonia ordinaria, cui infatti essa si riduce per $n=2$.

La condizione per l'apolarità delle due forme $a_x{}^n$, $b_x{}^n$ *è* $(a\,b)^n=0$.

Ogni forma binaria di grado dispari è apolare con sè stessa, ed ogni forma binaria di grado pari lo è, se è zero l'invariante bilineare $(a\,a')^n$, *che perciò si chiama* ARMONIZZANTE (BATTAGLINI, loc. cit.) Il risultato più importante nella teoria dell'apolarità è il seguente dovuto a ROSANES (loc. citato):

L'apolarità di due forme binarie di ordine n *è condizione necessaria e sufficiente perchè una delle forme sia esprimibile linearmente mediante le* $n.^{me}$ *potenze dei fattori lineari dell'altra* (forma canonica).

Date n *forme binarie di ordine* n, *esse possono rappresentarsi con combinazioni lineari di potenze* n^{me} *di* n *forme lineari, il cui prodotto è una forma apolare con tutte le* n *date.*

Queste ricerche sull'apolarità di forme si estendono al caso di forme qualunque e si ottengono allora notevoli risultati riguardanti la rappresentabilità di forme ternarie, quaternarie, ecc. mediante potenze di forme lineari.

Affini a queste ricerche sono quelle più antiche di SYLVESTER, nelle quali si volea che il numero delle forme lineari mediante le cui n^{me} potenze doveva esprimersi la forma data fosse inferiore ad n e propriamente $\frac{n}{2}$ per n pari, ed $\frac{n+1}{2}$ per n dispari. — Allora occorre che sia soddisfatta una certa relazione fra i coefficienti della forma solo nel caso che n sia pari; il primo membro di questa relazione invariantiva si dice CATALLETTICANTE; pel caso di n dispari la rappresentazione di tal genere è invece sempre possibile.

§ 3. — SISTEMI LINEARI DI GRUPPI DI PUNTI. INVOLUZIONI GENERALI.

Si abbiano $k+1$ forme binarie di grado n, $(k \leq n)$ linearmente indipendenti *

$$a_x{}^n,\ b_x{}^n \ldots$$

e si formi con $k+1$ parametri omogenei la forma

$$\lambda_1 a_x{}^n + \lambda_2 b_x{}^n + \lambda_3 c_x{}^n + \ldots$$

---

* Si dice che le forme date sono *linearmente indipendenti* quando non sussiste identicamente fra esse alcuna relazione lineare omogenea, cioè quando non si possano determinare dei parametri costanti $r_1\, r_2$ in modo che moltiplicando per essi rispettivamente le forme date, la somma dei prodotti così formati sia identicamente zero.

Questa forma di grado n, eguagliata a zero rappresenterà, ogni volta che sieno assegnati i valori per le costanti λ, un gruppo di n punti; si sarà dunque determinato, mediante le $k+1$ forme date, un sistema lineare k volte infinito o, come si suol dire, ∞^k gruppi di n punti. Si dice che questo sistema, è *un' involuzione di grado* n *e di specie* k. L'equazione

$$\lambda_1 a_x{}^n + \lambda_2 b_x{}^n + \ldots = 0$$

si chiama *l'equazione della involuzione*.

Per $n=2$, $k=1$ si ha l'involuzione ordinaria, cioè le infinite coppie di punti che si ottengono in questo caso, sono le coppie di punti coniugati della involuzione ordinaria determinata dalle due coppie di punti che rappresentano le due quadratiche date.

Un' involuzione di grado n *e specie* k *è determinata da* $k+1$ *gruppi di* n *punti che non appartengano ad una involuzione di specie inferiore.*

Se r punti di un gruppo di un' involuzione, coincidono in un punto, si dice che quel punto è r^{plo} per l'involuzione.

Un' involuzione di grado n *e di specie* k *ammette un numero finito di punti* $k+1^{pli}$, *propriamente ne possiede* $(k+1)\,(n-k)$. (Cremona, *Preliminari*, ecc. Bologna, 1866-67.)

Un' involuzione di grado n *e specie* k *contiene*

$$\frac{2^k\,(n-k)\,(n-k-1)\ldots(n-2\,k+1)}{k\,!}$$

gruppi, ciascuno dei quali è dotato di k *punti doppi.*

Sono specialmente interessanti le involuzioni di grado n e prima specie. *In esse vi sono $2n-2$ punti doppi o uniti, i quali sono determinati dall' Jacobiano*

$$(a\,b)\,a_x^{\,n-1}\,b_x^{\,n-1}=0.$$

L'insieme delle prime polari di un gruppo di n punti forma un' involuzione di grado $n-1$ e prima specie.

Le involuzioni si possono far corrispondere fra loro *proiettivamente* stabilendo delle relazioni *bilineari* fra i parametri di una e quelli di un altra.

Per due involuzioni di prima specie e di gradi m e n, sovrapposte, in corrispondenza proiettiva, accadrà $m+n$ volte, che un punto dell'una coincide con uno dei suoi corrispondenti nell'altra. Questo teorema è un caso particolare del cosiddetto *principio di corrispondenza di* CHASLES (v. Capitolo I, § 2).

(Forme quadratiche.) — Se di un punto dato si prende il punto polare rispetto ad una quadratica (centro armonico di primo grado), i due elementi di questa, il punto dato ed il punto polare sono in armonia.

L'annullarsi dell' invariante $A_{f\varphi}$ delle due forme quadratiche f e φ (v. I, pag. 291) esprime che i punti-zero della prima forma sono situati armonicamente rispetto ai punti zero della seconda.

I punti rappresentati dal covariante $\vartheta=0$ (Jacobiano) sono i punti uniti dell' involuzione di cui due coppie di punti coniugati sono rispettivamente quelli di $f=0$ e quelli di $\varphi=0$.

Altrimenti: *Esistono due punti di cui l'uno è polare dell'altro (e quindi coniugato armonico) rispetto a ciascuna di due quadratiche date; tali punti sono quelli di* $\vartheta = 0$.

L'annullarsi dell'invariante R di tre forme quadratiche esprime che le tre coppie di punti appartengono ad una stessa involuzione.

Una forma quadratica può con trasformazione lineare ridursi alla forma canonica $X_1^2 + X_2^2$ *contenente cioè solo i quadrati delle coordinate; per ciò fare basta prendere per nuovi punti fondamentàli delle coordinate omogenee due punti coniugati armonici fra loro rispetto alla forma quadratica, cioè il punto y (arbitrario) e il punto x radice di* $a_x a_y = 0$, *e inoltre scegliere convenientemente il punto unità.*

Scegliendo per punti fondamentali delle coordinate omogenee i due punti radici di $\vartheta = 0$, *ciascuna di due quadratiche si riduce a forma canonica.* Questi teoremi sono interessanti anche perchè trovano i loro analoghi nella teoria delle coniche e delle quadriche. Per essi si può vedere Clebsch, *Bin. Form.,* § 33, 37; essi sono poi anche casi particolari di quelli sopra accennati riguardanti la apolarità.

(Forme cubiche.) — I punti di una forma cubica $f = 0$ sieno a, b, c. Per l'apolarità della forma cubica con sè stessa si ha:

Se di un punto a della forma cubica si considera il gruppo polare di 1.° ordine (che è costituito di due punti) uno di questi coinciderà con a, e l'altro sarà il coniugato armonico di a rispetto alla coppia b, c.

Si hanno così tre altri punti a', b', c' *i quali sono i punti radici del covariante* $Q = 0$.

Ciascuno degli elementi di Q *ha il suo punto polare (gruppo di 2.° ordine) rispetto alla cubica, coincidente con un punto della cubica data* f.

I punti di f *insieme con quelli di* Q *formano tre coppie di punti coniugati in involuzione, di cui i punti doppi sono quelli dell' Hessiano* $\Delta = 0$.

Ciascuno dei due punti di $\Delta = 0$ *ha il gruppo polare di 1.° ordine rispetto alla cubica costituito di due elementi coincidenti, e con questo coincide poi anche il punto polare di 2.° ordine dello stesso elemento di* $\Delta = 0$ *rispetto alla cubica.*

Se rispetto ad una forma cubica e alla sua Jacobiana si prendono le coppie di elementi polari di 1.° ordine di un elemento arbitrario, tali coppie sono coniugate armoniche fra loro, e al variare dell' elemento arbitrario, costituiscono una involuzione di cui i punti doppi sono quelli di $\Delta = 0$.

Se un punto ha, rispetto alla cubica, i due elementi polari di primo ordine fra loro coincidenti, quel punto insieme ai tre elementi della cubica, costituisce una quaterna equianarmonica (v. Capitolo I, § 2); quindi *ogni punto dell' Hessiano insieme ai tre punti della cubica forma una quaterna equianarmonica.*

Prendendo per punti fondamentali di coordinate omogenee i punti di $\Delta = 0$, *la cubica si riduce a forma canonica, cioè contenente solo i cubi delle due variabili; e allora anche* Q *si riduce a forma canonica* (v. Clebsch, *Bin. Form.* § 38).

I tre elementi di f (come anche quelli di Q) sono fra loro in proiettività ciclica, di cui gli elementi doppi sono quelli di $\Delta = 0$.

In due terne di elementi $a\,b\,c$, $\alpha\,\beta\,\gamma$ apolari l'uno dell'altro, due qualunque punti del primo gruppo, per es. a, b, sono coniugati armonici rispetto al primo gruppo polare di c rispetto alla terna $(\alpha\,\beta\,\gamma)$.

Due forme cubiche sono apolari l'una dell'altra se è zero l'invariante $J = (f, \varphi)^3$ *.

Prendendo di ciascun elemento di una cubica il coniugato armonico rispetto agli altri due, si hanno tre punti; la condizione perchè questi siano apolari con quelli dell'altra cubica è data dall'annullarsi dell'invariante $A_{\Delta\Theta}$ o $A_{\nabla\Theta}$, di terzo grado nei coefficienti di una cubica e di primo grado in quelli dell'altra.

È $\Omega = 0$ la condizione perchè sieno apolari le due terne di punti che si ottengono nella medesima indicata maniera da ciascuna delle due cubiche.

L'annullarsi di $A_{\Delta\nabla}$ rappresenta che la coppia di punti, ognuno dei quali forma una quaterna equianarmonica cogli elementi della prima cubica è armonica colla coppia analoga relativa alla seconda cubica.

(Forme biquadratiche.) ** — *Se l' invariante j è zero, i quattro punti rappresentati da una binaria*

---

* Per le notazioni qui adoperate si vegga il vol. I di quest'Opera, pag. 297.

** Tralasciamo di notare le proprietà già notate nel volume I del Repertorio.

biquadratica sono armonici; se invece i è zero i quattro punti sono equianarmonici; in quest'ultimo caso la f è apolare con sè stessa.

L'Hessiano di una forma biquadratica rappresenta quattro elementi ciascuno dei quali ha il gruppo polare di 3.° ordine rispetto alla forma coincidente col gruppo polare di 2.° ordine (formato di elementi coincidenti). Ciascun punto di H forma coi tre punti del proprio primo gruppo polare una quaterna equianarmonica.

La forma $T=0$ rappresenta sei elementi ciascuno dei quali ha il 3.° gruppo polare (rispetto ad f) coincidente con uno dei tre punti del 1.° gruppo polare, e forma con questi tre una quaterna armonica.

Le tre involuzioni determinate dalle coppie degli elementi della biquadratica, ovvero del suo Hessiano, hanno per elementi doppi quelli del covariante T, e ciascuna di queste tre coppie di elementi doppi rappresenta anche gli elementi doppi dell'involuzione determinata dagli altri due.

Se $j=0$, la f si può ridurre alla forma canonica contenente solo le quarte potenze di due forme lineari, le quali sono quelle di una delle coppie di T. In tal caso gli elementi di f costituiscono una proiettività ciclica di cui gli elementi doppi sono due di quelli di T.

Queste considerazioni sulla rappresentazione geometrica delle forme binarie, si trovano, oltre che nelle opere degli autori tedeschi, anche in antiche memorie di Battaglini (*Accad. Nap.*, 1864 e seg.) ingiustamente dimenticate.

§ 4. — Proprietà proiettive dei triangoli, quadrangoli, esagoni, ecc.

Se in due quadrangoli piani completi, riferiti fra loro, cinque lati del primo segano i lati corrispondenti del secondo in cinque punti di una retta, anche i sesti lati si incontreranno in un punto della stessa retta, e le congiungenti i vertici corrispondenti concorreranno in un punto unico; inoltre anche i triangoli diagonali saranno omologici.

Di qui si ha: *Se un quadrangolo completo si deforma in modo che cinque dei suoi lati passino per punti fissi di una retta, anche il sesto roterà intorno ad un punto fisso della stessa retta, che con quei cinque costituisce una involuzione di sei punti.*

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale arbitraria in tre coppie di punti coniugati in involuzione.

Di qui: *se una trasversale incontra in* A *e* A', B *e* B', C *e* C' *le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo, fra i segmenti della trasversale ha luogo la relazione*

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = 0.$$

Possono poi naturalmente enunciarsi per il quadrilatero, i teoremi correlativi a questi.

I tre cerchi aventi per diametri le tre diagonali di un quadrilatero completo, passano per gli stessi punti.

I tre punti medi delle tre diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta.

In un quadrangolo completo, due lati concorrenti in un punto diagonale sono separati armonicamente mediante gli altri due.

In un quadrilatero completo ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due

Indicando con L, L'; M, M'; N, N' i punti che insieme con una trasversale s dividono armonicamente i lati AB, CD, AC, BD, AD, BC di un quadrangolo completo, le rette LL', MM', NN', concorrono in un punto che insieme ad esse divide armonicamente LL', MM', NN'.

Se una trasversale sega i lati di un triangolo RSQ in tre punti $A'B'C'$ i quali siano rispett. accoppiati in involuzione con tre altri punti ABC della stessa trasversale, le rette RA, SB, QC concorrono in un punto.

Se da un punto S si proiettano i vertici di un trilatero rsq mediante tre raggi $a'b'c'$ i quali siano accoppiati in involuzione con tre altri raggi a, b, c uscenti da S, i punti ra, sb, qc saranno in una retta.

Se i lati di un triangolo sono segati da una trasversale arbitraria, e se i vertici si proiettano da un punto arbitrario sui lati risp. opposti, il prodotto dei rapporti anarmonici dei gruppi di quattro punti che si ottengono sui tre lati è l'unità negativa.

Se tre rette uscenti da un punto e passanti pei vertici di un triangolo ABC, incontrano i lati opposti in $A'\,B'\,C'$, fra i segmenti dei lati si ha la relazione

$$AB' \, . \, BC' \, . \, CA' + AC' \, . \, CB' \, . \, BA' = 0$$

ovvero

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = -1 \quad (\textit{teor. di } \text{Ceva}, 1678)$$

e reciprocamente se per tre punti $A'\,B'\,C'$ sui lati di un triangolo sussiste la precedente relazione, le congiungenti $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$ concorreranno in un punto.

Se una trasversale sega i lati di un triangolo ABC in tre punti $A'\,B'\,C'$, fra i segmenti dei lati sussiste la relazione

$$AB' \, . \, BC' \, . \, CA' - AC' \, . \, CB' \, . \, BA' = 0$$

ovvero

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = 1 \qquad (\textit{teor. di } \text{Menelao})$$

e reciprocamente.

Se si dividono armonicamente i lati di un triangolo ABC, nei punti A', B', C', A'', B'', C'' in modo che sia

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''A} \cdot \frac{CA''}{A''B} = 1$$

i circoli di diametri A, A'; B, B'; C, C' passano per gli stessi due punti PP' tali che si ha

$$AP : BP : CP = AP' : BP' : CP',$$

e la corda PP' è divisa armonicamente e normalmente dal circolo dei tre punti ABC.

Se un esagono piano semplice ha i vertici di ordine dispari in una retta e quelli di ordine pari in un'altra retta, le tre coppie di lati opposti si tagliano in punti per diritto.

Se un seilatero piano semplice ha i lati di ordine impari concorrenti in un punto, e quelli di ordine pari concorrenti in un altro punto, le congiungenti le tre coppie di vertici opposti concorrono in uno stesso punto.

Questi due teoremi sono casi particolari di quelli chiamati teoremi di PASCAL e BRIANCHON (vedi più sotto) relativi alle coniche, e si ottengono dal caso generale supponendo che la conica fondamentale si scinda in due rette, o in due punti.

§ 5. — GEOMETRIA METRICA DEL TRIANGOLO PIANO. FORMOLE DI TRIGONOMETRIA PIANA.

Indicando con a, b, c i tre lati e con A, B, C i tre angoli (rispett. opposti) di un triangolo rettilineo *si hanno le relazioni*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \operatorname{sen} A$$

e le altre due che si ricavano dalla seconda permutando fra loro le lettere a, b, c, A, B, C.

Indi si hanno le altre formole (dove con s si indica la semisomma dei lati):

$$a = \frac{b}{\cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} A}$$

$$= b \cos C + b \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} B$$

$$= b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 C}$$

$$= b \cos c + c \cos B$$

$$= \frac{2\, s \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{s \operatorname{sen} \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{2}{b\, c} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2\, c\, b}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\, c}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - a \cos C}$$

$$(a-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B) = (a+b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B)$$

(*analogia di* NEPER)

$$(s-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}A=(s-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}B=(s-c)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}C$$

$$s=(s-a)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}B\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}C$$

$$c\,\mathrm{sen}\,(A-B)=a\,\mathrm{sen}\,A-b\,\mathrm{sen}\,B$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cos\frac{1}{2}(B-C)=(b+c)\cos\frac{1}{2}(B+C)\\ a\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B-C)=(b-c)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B+C)\end{array}\right\}\ \text{(doppio teor. di GAUSS)}$$

$$a^2\,\mathrm{sen}\,(B-C)=(b^2-c^2)\,\mathrm{sen}\,(B+C)$$

$$\mathrm{sen}\,A+\mathrm{sen}\,B+\mathrm{sen}\,C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$$

$$\mathrm{sen}\,2A+\mathrm{sen}\,2B+\mathrm{sen}\,2C=4\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}A\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}C-1$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$$

$$\mathrm{tg}\,A+\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C=\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C$$

$$\mathrm{ctg}\,A+\mathrm{ctg}\,B+\mathrm{ctg}\,C=\mathrm{ctg}\,A\,\mathrm{ctg}\,B\,\mathrm{ctg}\,C+$$
$$+\,\mathrm{cosec}\,A\,\mathrm{cosec}\,B\,\mathrm{cosec}\,C$$

$$\mathrm{sen}\,A+\mathrm{sen}\,B+\mathrm{sen}\,C=4\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}A\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}B\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}C$$

$$\mathrm{sen}\,2A+\mathrm{sen}\,2B+\mathrm{sen}\,2C=4\cos A\cos B\cos C$$

$$\mathrm{sen}^2A+\mathrm{sen}^2B-\mathrm{sen}^2C=2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\cos C$$

$$\mathrm{sen}^2A+\mathrm{sen}^2B+\mathrm{sen}^2C=1-2\cos A\cos B\cos C.$$

L'area del triangolo può poi essere espressa dalle seguenti formole:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{1}{2} a\, b \operatorname{sen} C$$

$$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

§ 6. — Geometria metrica del triedro e del triangolo sferico. Formole di trigonometria sferica.

Consideriamo tre piani di una stella (non di un fascio, quindi non passanti per una stessa retta); supposti i tre piani limitati alle rette colle quali si intersecano a due a due e al punto d'intersezione comune, si ha *un triedro;* supposto questo triedro segato con una sfera di raggio 1 e che abbia per centro quello della stella, si ha sulla sfera *un triangolo sferico,* di cui i lati sono archi di circoli massimi, che possono essere misurati dagli angoli al centro della sfera, cioè dagli angoli contenuti nelle *facce del triedro;* inoltre gli angoli del triangolo sferico sono gli angoli che fanno fra loro le tangenti ai lati nel vertice del triangolo, e tali angoli sono quelli che fanno fra loro le facce del triedro, cioè quelli dei diedri contenuti nel triedro. La geometria metrica del triedro cioè la *triedrometria*, si confonde così con quella

del triangolo sferico, cioè colla *trigonometria sferica.*

Fra i triangoli sferici sono da notarsi i rettangoli, i birettangoli e i trirettangoli. Questi ultimi sono formati di tre archi di circoli massimi fra loro a due a due perpendicolari; *tutti i lati e tutti gli angoli sono di novanta gradi.*

In ogni triangolo sferico rettangolo i tre lati sono minori di 90 gradi, ovvero uno solo di questi lati è minore di 90 gradi.

In ogni triangolo sferico rettangolo, un angolo non retto, e il suo lato opposto sono ambedue maggiori o minori di 90 gradi.

Se in un triangolo sferico ciascun lato ed angolo è minore di 180°, la somma degli angoli è maggiore di 180°, e la differenza fra questa somma e 180° dicesi ECCESSO *del triangolo sferico.*

Il triangolo sferico è allora equivalente ad un altro triangolo sferico birettangolo il cui terzo angolo è l' eccesso del triangolo dato. (Questo teor. fu dimostrato incompletamente da GIRARD nel 1629; indi dimostrato in modo semplice da CAVALIERI nel 1632.)

Come *unità* delle aree sferiche si assume il triangolo birettangolo, il cui terzo angolo sia l'*unità angolare.* Allora si ha: *L' area di un triangolo sferico è eguale al suo* ECCESSO.

Dato un circolo massimo sulla sfera, i due estremi del diametro perpendicolare si chiamano *poli del circolo massimo.* Supposto il circolo massimo percorso in un certo senso (che si chiamerà *positivo)* da un viaggiatore che appoggi i piedi sulla sfera, si chiamerà propriamente *polo* del circolo, quello

fra i due, che resta a sinistra del viaggiatore; per modo che dato il polo di un circolo è determinato su questo il senso positivo del cammino. Quella faccia del piano del circolo massimo che guarda verso il polo si chiamerà *positiva.*

Spostandosi di un certo angolo il piano di un circolo massimo, il polo si sposta del medesimo angolo.

Dato un triangolo sferico $A\,B\,C$, cerchiamo i poli rispettivamente dei lati $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$ (dove si intende che su questi lati il senso positivo debba essere rispett. quello delle direzioni $B\,C$, $C\,A$, ecc.)

Questi tre poli che indicheremo con $A'\,B'\,C'$ formano un altro triangolo sferico che si chiama *polare o reciproco del dato.*

Il triangolo $A'\,B'\,C'$ ha a sua volta per polare il triangolo $A\,B\,C$.

Gli angoli di un triangolo sono rispettivamente i supplementi dei lati del triangolo polare.

L'area di un triangolo e il perimetro del triangolo polare sommati insieme danno 360°.

Supponiamo il contorno di un triangolo sferico percorso in un certo senso, per es. nel senso $A\,B\,C$, e che questo sia il senso positivo rispettivamente su ciascuno dei circoli massimi $A\,B$, $B\,C$, $C\,A$; questi lati *percorsi in questo senso* abbiano rispettivamente i valori c, a, b.

Per angolo $B\,A\,C$ intendiamo l'angolo fatto dalle due direzioni $A\,B$, $A\,C$, di cui dunque una è positiva e l'altra è negativa; così per gli angoli $A\,C\,B$, $C\,B\,A$. Tali angoli sieno indicati rispettivamente con A, C, B.

Intendendo per *angolo di due piani del triedro* che corrisponde al triangolo sferico, l'angolo racchiuso dalle due facce, una positiva e l' altra negativa dei due piani, si ha:

Gli angoli di un triangolo sferico sono supplementari degli angoli racchiusi dai tre piani del triedro corrispondente al triangolo dato.

Se per *angolo dei due piani del triedro*, si intende *invece* l'angolo racchiuso dalle due *facce positive*, si ha allora che gli angoli racchiusi dalle tre facce del triedro fra loro sono rispettivamente eguali a quelli che abbiamo indicati con A, B, C, e che *non* sono gli angoli formati dalle direzioni *positive* dei circoli massimi.

Supposto $A = 90^\circ$, le formole principali per i triangoli sferici *rettangoli* sono le seguenti:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\begin{cases} \cos b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C \end{cases}$$

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$$

$$\begin{cases} \cos B = \cos b \operatorname{sen} C \\ \cos C = \cos c \operatorname{sen} B. \end{cases}$$

Le formole fondamentali per i triangoli sferici *qualunque* possono ritenersi le seguenti:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\cos a \;= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

e le altre che si ricavano da queste cogli scambii di lettere.

La prima di queste formole si trova sino nelle opere degli antichi geometri (MENELAO, *Spherica*, III); le altre si chiamano *le formole di* EULERO (*Mem. de Berlin*, 1753). Da esse possono ricavarsi tutte le formole della trigonometria sferica, il che fu fatto per la prima volta da LAGRANGE (*Journ. de l'Éc. polyt.*, 1799) e GAUSS (*Aggiunte alla Geometria di posizione di* CARNOT, *trad. da* SCHUMACHER).

Ponendo $a + b + c = 2s \quad A + B + C = 2S$

altre formole sono le seguenti:

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} A$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a) \operatorname{sen}(s-b) \operatorname{sen}(s-c)}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b) \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$$

dalle quali, colla divisione, si ottengono facilmente le formole per $\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} A$, $\mathrm{ctg}^2 \frac{1}{2} a$; formole che servono specialmente per il calcolo numerico di un angolo mediante i tre lati, o di un lato mediante i tre angoli.

Se tutti gli angoli e i lati di un triangolo sferico sono minori di 180° si hanno le formole (dette di GAUSS o di DELAMBRE)

$$\mathrm{sen} \frac{1}{2} (A - B) \,\mathrm{sen} \frac{1}{2} c = \mathrm{sen} \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) \,\mathrm{sen} \frac{1}{2} c = \mathrm{sen} \frac{1}{2} (a + b) \,\mathrm{sen} \frac{1}{2} C$$

$$\mathrm{sen} \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a + b) \,\mathrm{sen} \frac{1}{2} C.$$

Queste formole furono pubblicate quasi contemporaneamente da GAUSS (*Th. motus*, etc.), da DELAMBRE (*Connaiss. des temps,* 1808) e da MOLLWEIDE (*Zach monatl. Corresp.*, 1808. Vol. XVIII).

Dividendo queste formole fra loro si hanno i valori di

$$\mathrm{tg} \frac{1}{2} (A + B), \qquad \mathrm{tg} \frac{1}{2} (A - B),$$

$$\mathrm{tg} \frac{1}{2} (a + b), \qquad \mathrm{tg} \frac{1}{2} (a - b);$$

le formole corrispondenti si chiamano *analogie di* NEPER perchè pubblicate da questo AUTORE nel 1614.

Altre formole adoperate da GAUSS sono le seguenti:

$$(\text{sen}\, A - \text{sen}\, B)\, \text{sen}\, c = (\text{sen}\, a - \text{sen}\, b)\, \text{sen}\, C$$
$$(\text{sen}\, A + \text{sen}\, B)\, \text{sen}\, c = (\text{sen}\, a + \text{sen}\, b)\, \text{sen}\, C$$
$$(\cos A + \cos B)\, \text{sen}\, c = \text{sen}\,(a + b)\,(1 - \cos C)$$
$$\text{sen}\,(A + B)\,(1 + \cos c) = (\cos a + \cos b)\, \text{sen}\, C.$$

Da ogni vertice del triangolo sferico conduciamo il circolo massimo perpendicolare al lato opposto; esso divide l'angolo e il lato opposto in due parti M, N; m, n in modo che $M + N = A$, $m + n = a$ (se tale circolo perpendicolare è stato condotto dal vertice A). Si hanno allora le relazioni:

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}(M + N)\,\text{tg}\,\frac{1}{2}(M - N) = \frac{\text{sen}\,(b - c)}{\text{sen}\,(b + c)}$$

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}(m + n)\,\text{tg}\,\frac{1}{2}(m - n) =$$
$$= \text{tg}\,\frac{1}{2}(b + c)\,\text{tg}\,\frac{1}{2}(b - c)$$

$$\frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}(M - N)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}(M + N)} = \text{tg}\,\frac{1}{2}(B + C)\,\text{tg}\,\frac{1}{2}(B - C)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m-n)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m+n)} = \frac{\operatorname{sen}(B-C)}{\operatorname{sen}(B+C)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} M}{\operatorname{tg} N} = \frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(M+N)}{\operatorname{sen}(M-N)} = \frac{\operatorname{sen}(m+n)}{\operatorname{sen}(m-n)}.$$

La quantità avanti designata con S (pag. 93) ha relazione (come abbiamo sopra detto, pag. 90) coll'area del triangolo sferico; si hanno per essa le seguenti formole importanti:

$$\operatorname{sen} S = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\operatorname{tg} S = -\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\operatorname{sen} C}$$

$$\operatorname{ctg} S = -\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(S - 90^\circ) =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{1}{2} s \operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c).$$

A queste formole corrispondono naturalmente quelle colle quali si calcola il perimetro $2s$ del triangolo sferico; basta sostituire al triangolo dato il suo triangolo polare e a questo applicare le formole precedenti.

Se in un triangolo sferico resta costante un angolo e il prodotto delle tangenti delle metà dei lati che comprendono l'angolo, resta costante l'area del triangolo.

Se in un triangolo sferico resta costante un lato e il prodotto delle tangenti dei semiangoli adiacenti al lato, resta costante il perimetro del triangolo.

Se i rapporti dei lati del triangolo sferico al raggio della sfera sono piccoli, gli angoli del triangolo sferico superano approssimativamente della terza parte dell' ECCESSO, *gli angoli corrispondenti di un triangolo piano che ha i lati ordinatamente uguali a quelli del triangolo sferico (teor. di* LEGENDRE, *Mem. de Paris*, 1787).

Gli studi di trigonometria sferica, che erano necessarii per le ricerche astronomiche, risalgono sino ai geometri greci. Fra i moderni se ne oc-

cupò nuovamente con nuove importanti ricerche, l'Eulero, *Mém. de Berlin*, 1753, e *Acta Petrop.*, 1779); indi se ne occuparono Legendre (*Trigon.*), Lexell (*Acta Petrop.*, 1782), Lagrange (*Journ. de l'Éc. polyt.*, cah. VI e Gauss. Sono poi importanti le opere di Möbius (*Analyt. Sphärik*, 1846) e Gudermann (*Nied. Sphärik*, 1835).

Fra le opere più moderne, oltre il notissimo trattato di Serret (tradotto anche varie volte in italiano) citiamo l'eccellente piccolo trattato di Baltzer (tradotto in ital. da Cremona, 3.ª ediz., Genova, 1881).

CAPITOLO III.

Teoria invariantiva delle forme algebriche. Connessi.

§ 1. — Generalità sulle forme algebriche.

Nel vol. I, Cap. XII abbiamo trattato delle forme algebriche binarie. Ora diremo qualcosa sulle forme algebriche ternarie. Lo studio di queste appartiene più propriamente alla Geometria, inquantochè è nella Geometria che si possono utilizzare i risultati ottenuti dallo studio delle formazioni invariantive appartenenti a quelle forme.

Si dirà *forma algebrica ternaria* una funzione, intera, omogenea di tre variabili $x_1 x_2 x_3$; i coefficienti di questa forma possono poi essere a loro volta funzioni intere omogenee di altre tre variabili $y_1 y_2 y_3$, e si ha allora la *forma a due serie di variabili*, ecc.; similmente si definirebbero le forme quaternarie, quinarie, ecc.

Con principi simili a quelli adoperati nel caso delle forme binarie, (che qui non ripeteremo), possiamo *simbolicamente* porre una forma ternaria di

ordine n, sotto la forma

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$$

La teoria invariantiva delle forme algebriche studia quelle formazioni razionali intere omogenee dei coefficienti di una o più forme originarie, e delle variabili, le quali formazioni per una trasformazione lineare delle variabili (per un'omografia) restano inalterate a meno di un fattore, potenza del cosiddetto modulo della sostituzione. Siffatte formazioni si chiamano perciò *formazioni invariantive.*

È facile riconoscere che fra tali formazioni invariantive, devono includersi anche di quelle le quali non hanno le loro corrispondenti nel caso del campo binario.

Interpretiamo, infatti, le x come coordinate omogenee di punti del piano. Nella trasformazione lineare delle coordinate x di punti, conviene tener conto anche dell'elemento che nel piano è *duale* al punto, cioè della retta, e quindi conviene considerare insieme, anche la correlativa trasformazione delle coordinate di rette nel piano. Questo è un fatto nuovo che nel campo binario non si presentava.

Indicando perciò con $u_1\, u_2\, u_3$ le coordinate omogenee di rette nel piano, conviene più generalmente considerare formazioni le quali oltrecchè contenere coordinate-punti, contengano anche coordinate-rette.

Propriamente distingueremo quattro specie di formazioni invariantive :

1. *Invarianti;* non dipendono che dai coefficienti della forma originaria. Il grado in tali coefficienti si dice *grado dell' invariante.*

2. *Covarianti;* dipendono, oltrechè dai coefficienti, anche dalle coordinate-punti. Il grado in tali coordinate si dice *ordine.*

3. *Contravarianti* o *forme aggiunte;* dipendono, oltrecchè dai coefficienti, anche dalle coordinate-rette. Il grado in tali coordinate si dice *classe.*

4. *Forme miste;* dipendono, oltrecchè dai coefficienti, dalle coordinate-punti, e dalle coordinate-rette.

Da questo punto di vista allora possiamo *più generalmente* immaginare che la forma o le forme originarie fondamentali, contengano, oltrecchè coordinate-punti, anche coordinate-rette, e anche che contengano più serie delle une, e più serie delle altre.

Se una di esse contiene solo una serie di coordinate punti, la sua espressione simbolica sarà a_x^n, ed eguagliata a zero rappresenterà una *curva algebrica di ordine n* (v. *Cap. sulla teoria delle curve*).

Se contiene solo una serie di coordinate-rette, la sua espressione simbolica sarà u_α^n ed eguagliata a zero rappresenterà *una curva algebrica di classe n* (v. Idem).

Se contiene una serie di coordinate-punti, e una serie di coordinate-rette la sua espressione simbo-

lica sarà

$$a_x^m \, u_\alpha^n$$

ed eguagliata a zero rappresenterà *un connesso*; di questi tratteremo alla fine di questo capitolo.

I casi in cui le serie di coordinate delle due specie sono in numero maggiore di uno, si riducono ai soli casi sopra enunciati, mediante il seguente teorema fondamentale:

Un sistema di forme ternarie in numero qualunque, di cui ciascuna contiene più serie di coordinate-punti, e più serie di coordinate-rette, può sempre essere sostituito da un sistema EQUIVALENTE, *di cui ogni forma non contiene che solo una serie di coordinate-punti, e una serie di coordinate-rette, e di cui tutte le formazioni invariantive sono le stesse di quelle del sistema primitivo* (v. CLEBSCH, *Abh. Göttingen*, 1872, e CLEBSCH-LINDEMANN, *Geom.*).

Come pel campo binario, così anche per il ternario si ha il teorema, *che esiste sempre un* SISTEMA COMPLETO *di formazioni invariantive, nel senso che mediante esse e con funzione razionale intera può esprimersi ogni altra formazione invariantiva appartenente alle forme fondamentali date.*

Esaminiamo ora come si trasformano, colla sostituzione lineare, le coordinate-punti, le coordinate-rette, e i coefficienti simbolici della forma originaria.

Indicando con X_i le nuove coordinate-punti, si abbia:

$$X_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3$$

e sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

il modulo della trasformazione.

Indicando allora con A_{ij}; i complementi algebrici degli elementi α_{ij} in Δ, *si hanno le seguenti formole:*

$$x_i \equiv A_{1i} X_1 + A_{2i} X_2 + A_{3i} X_3$$
$$u_i = \alpha_{1i} U_1 + \alpha_{2i} U_2 + \alpha_{3i} U_3$$
$$U_i = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3.$$

Sapendo, che se si indicano con $y_1 y_2 y_3$ le coordinate di un altro punto della retta u, le coordinate $u_1 u_2 u_3$ sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix};$$

e correlativamente, indicando con $v_1 v_2 v_3$ le coordinate di un'altra retta passante per il punto x, le coordinate $x_1 x_2 x_3$ sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix};$$

si ha: *che i minori di queste matrici si trasformano nella sostituzione lineare, colle stesse formole con cui si trasformano rispett.* u_i, *e* x_i.

La espressione u_x, colla trasformazione lineare, si riduce a U_X (a meno di un fattore Δ); *tale espressione è dunque una forma mista appartenente a qualunque forma originaria fondamentale (perchè è indipendente dai coefficienti della forma originaria).* Si chiama perciò *covariante identico.*

Sussiste il seguente teorema:

Se una forma invariantiva di un sistema di forme date, non contiene i coefficienti di queste, e contiene una sola serie di coordinate-punti, e una sola serie di coordinate-rette, essa è necessariamente una potenza del covariante identico u_x (a meno di un coefficiente numerico).

Passando ora alle formole di trasformazione dei coefficienti simbolici $a_1\, a_2\, a_3$ di una forma ternaria data, noi osserveremo quanto segue:

Se una forma originaria data contiene solo una serie di coordinate-punti ed è quindi esprimibile col simbolo a_x^n, i coefficienti simbolici $a_1\, a_2\, a_3$ si trasformano colle medesime formole con cui si trasformano le coordinate di rette $u_1\, u_2\, u_3$.

Se una forma originaria data contiene solo una serie di coordinate-rette ed è quindi esprimibile col simbolo u_α^m, i coefficienti simbolici $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ si trasformano colle medesime formole con cui si trasformano le coordinate di punti $x_1\, x_2\, x_3$.

Se infine una forma originaria è simbolicamente del tipo $a_x^n\, u_\alpha^m$, i coefficienti a si trasformano come le u, e i coefficienti α come le x.

Se Π *è una formazione invariantiva che dipende dai coefficienti effettivi* a_{ij} *di una forma originaria, e se i coefficienti omologhi di un' altra forma simile a quest'ultima si indicano con* b_{ij}, *la espressione*

$$\Sigma\, b_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial a_{ij}}$$

contiene le a ad un grado di un'unità inferiore a quello con cui le contiene Π, *contiene linearmente i coefficienti b, e possiede ancora la proprietà invariantiva.* L'operazione

$$\Sigma\, b_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

si dice *operazione di* Aronhold.

In questo modo da una forma invariantiva di un qualunque grado nei coefficienti di una forma data, si può ricavare un'altra la quale contenga linearmente i coefficienti di tante forme omologhe alla data. Ciò è utile per trasformare in espressione simbolica la forma invariantiva data.

Mediante l'introduzione della notazione simbolica ogni forma invariantiva di un sistema di forme originarie, resta espresso come forma invariantiva di un sistema di forme lineari.

Date le forme lineari a_x, u_α, u_β, *l'operazione*

$$(\alpha_2\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_2)\frac{\partial}{\partial a_1} + (\alpha_3\,\beta_1 + \alpha_1\,\beta_3)\frac{\partial}{\partial a_2} + \\ + (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)\frac{\partial}{\partial a_3}$$

applicata su di una forma invariantiva Π *che con-*

tenga i coefficienti $a_1 a_2 a_3$, *lascia inalterata la proprietà invariantiva.*

Ogni formazione invariantiva di un sistema di forme ternarie può simbolicamente essere rappresentata come l'assieme di prodotti simbolici di cui i fattori sono dei tipi:

$$u_x,\ a_x,\ u_\alpha,\ a_\alpha,\ (a\,b\,c),\ (a\,b\,u),\ (a\,u\,v),\ (u\,v\,w)$$
$$(\alpha\,\beta\,\gamma),\ (\alpha\,\beta\,x),\ (\alpha\,x\,y),\ (x\,y\,z)$$

dove a, b, c, ... *sono coefficienti di forme lineari in coordinate-punti;* α, β, γ, ... *sono coefficienti di forme lineari in coordinate-rette;* $x\,y\,z$ ... *sono coordinate-punti; e* u, v, w, ... *sono coordinate-rette.*

Per il calcolo simbolico delle forme ternarie e di specie superiore sono fondamentali certe *identità* analoghe a quelle che si adoperano per il calcolo simbolico delle forme binarie. Per il campo ternario tali identità sono:

$$(abc)(def)-(bcd)(aef)+(cda)(bef)-(dab)(cef)=0$$
$$(a\,b\,c)\,d_x-(b\,c\,d)\,a_x+(c\,d\,a)\,b_x-(d\,a\,b)\,c_x=0$$
$$(a\,b\,c)(x\,y\,z)-\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$
$$(x\,y\,z)\,a_t-(y\,z\,t)\,a_x+(z\,t\,x)\,a_y-(t\,x\,y)\,a_z=0$$
$$(xyz)(trs)-(yzt)(xrs)+(ztx)(yrs)\quad(txy)(zrs)=0$$

dove $a\,b\,c\,d\,e\,f$ rappresentano coefficienti di forme lineari in coord. punti, ovvero anche coordinate-rette; $x\,y\,z\,t\,r\,s$ rappresentano coordinate-punti, ovvero anche coefficienti di forme lineari in coordinate-rette.

Per le forme di specie superiore, si hanno anche cinque tipi di identità analoghe a quelle di sopra. Queste identità sono *le uniche primitive che possano sussistere fra formazioni simboliche di tipo invariantivo; nel senso che ogni altra identità apparentemente diversa, deve necessariamente essere una combinazione delle identità soprascritte.* Questo teorema fu dimostrato per forme binarie e ternarie da Gordan e Study (*Math. Ann.* Ann. XXX, pag. 120) e per il caso generale da Pascal (*Lincei, Rend.* 1888; *Memorie V*, 1888).

Un problema interessante per la teoria delle forme ternarie e superiori, è quello riguardante una possibile estensione della formola di Clebsch-Gordan, che esprime una funzione con più serie di variabili mediante polari di funzioni con un numero minore di serie di variabili.

Di questo problema si occupò come abbiamo già detto sopra, il Clebsch nel 1872; esso fu poi ripreso e trattato da un altro punto di vista, senza cioè la introduzione di coordinate-rette, da Capelli (*Giorn. di Batt. XVIII*; *Lincei, Memorie XII*, 1882).

È evidente come molte delle considerazioni qui fatte per le forme ternarie si possano anche fare in generale per le forme di specie superiore, r. Si possono, come nel campo ternario, anche nel campo delle forme di specie qualunque, definire delle coordinate u, le quali per la trasformazione lineare, si comportino come i determinanti minori della matrice formata con $r-1$ serie di variabili

$$x, y, z, \dots$$

cogredienti di specie r. Rappresentando le x come le coordinate dei punti di uno spazio ad $r-1$ dimensioni, le u sono le coordinate dell'elemento che in tale spazio è *duale* al punto.

In quanto ai sistemi completi per le speciali forme ternarie, ne riferiremo in capitoli appositi, e cioè per le forme ternarie quadratiche nel cap. sulle coniche, per le forme ternarie cubiche nel cap. sulla curva di 3.° ordine, ecc.

Trattati sulle forme ternarie, quaternarie, ecc. non ne esistono, e la teoria di tali forme non è così sviluppata come quella delle forme binarie. Fra le opere che ne trattano citeremo l'*Algebra der linearen Transf.* di SALMON-FIEDLER, dove si tratta, oltrechè delle forme binarie, anche di quelle di specie superiore; il noto trattato di Geometria di CLEBSCH-LINDEMANN, e finalmente un libro di STUDY (*Methoden zur Theorie der ternären Formen*, Leipzig, 1889).

§ 2. — PRINCIPIO DI TRASPORTO.

È interessante nella teoria delle forme ternarie il cosiddetto *principio di trasporto di* CLEBSCH *(Uebertragungsprincip)*, che serve a ricavare certe particolari forme invariantive ternarie, da noti invarianti o covarianti binari.

Consideriamo il caso in cui si abbia una forma fondamentale ternaria $a_x^n \equiv b_x^n \equiv \ldots$ in coordinate-punti.

Sieno $y_1 y_2 y_3$, $z_1 z_2 z_3$ due punti; le coordinate di un punto della retta che li congiunge sieno

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1$$
$$x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2$$
$$x_3 = \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3.$$

Sostituendo questi valori in $a_x^n = 0$ e ponendo simbolicamente

$$a_y = \alpha_1 \quad , \quad a_z = \alpha_2$$

si ha $\alpha_\lambda^n = 0$, le cui radici λ corrisponderanno ai punti d'incontro della retta $(y\, z)$ colla curva

$$a_x^n = 0.$$

Si abbia ora un invariante o covariante della forma *binaria* α_λ^n e sia Π; esso sarà formato di termini ognuno dei quali ha per fattori, determinanti binari del tipo $(\alpha\, \beta)$, e fattori lineari del tipo $\alpha_\lambda\, \beta_\lambda \ldots$ dove con $\beta \ldots$ si indicano simboli equivalenti ad α.

Eguagliando Π a zero si ha la condizione perchè il gruppo di n punti nei quali la retta taglia la curva, abbia speciali proprietà proiettive; se dunque si trasforma Π in modo da contenere i coefficienti della ternaria data, e le coordinate u della retta $(y\, z)$, si ha una formazione invariantiva la quale eguagliata a zero, rappresenterà l'assieme

di tutte le rette u che segano la curva data in gruppi di punti aventi quelle determinate proprietà.

Ora è facile verificare che ogni determinante $(\alpha\beta)$ equivale ad un determinante $(a\,b\,u)$, e ogni fattore α_λ equivale ad a_x dove però le variabili x ed u non sono indipendenti ma legate dalla condizione $u_x = 0$, e perciò, chiamando $v_1\, v_2\, v_3$ le coordinate di un'altra retta che passa pel punto x, possiamo al fattore a_x sostituire il determinante $(a\,u\,v)$.

È evidente che se invece di una sola forma primitiva se ne hanno più, i calcoli e i ragionamenti precedenti sarebbero gli stessi.

Si ha dunque la seguente facile regola per trasportare dal campo binario al campo ternario, formazioni invariantive: *ogni determinante binario* $(\alpha\beta)$ *si sostituisca con un determinante ternario* $(a\,b\,u)$, *dove* a, b,... *sono i simboli di quelle forme ternarie, che corrispondono, secondo le formole soprascritte, ai simboli* α, β,...: *inoltre ogni fattore lineare come* α_λ *si sostituisca con un determinante* $(a\,u\,v)$ *dove le* v *si considerano come delle quantità arbitrarie.*

Una siffatta formazione eguagliata a zero rappresenterà, nelle coordinate u, *una curva (o un sistema di curve se nella formazione entrano anche le* v*) le cui tangenti segano la curva o le curve date in punti godenti di speciali proprietà invariantive.*

Le applicazioni di questo principio sono svariatissime; una delle più importanti è la seguente:

Si voglia trovare l'equazione tangenziale di una curva data in coordinate-punti, $f = \alpha_x^n = 0$. *Baste-*

rà conoscere l'espressione simbolica del discriminante di una forma binaria di ordine n, α_λ^n, *e in essa mutare ogni determinante* $(\alpha\,\beta)$ *in un determinante* $(a\,b\,u)$.

Un principio di traslazione simile a questo qui sviluppato può applicarsi anche nel caso in cui la forma primitiva fondamentale sia più generalmente un *connesso* (v. § 1) cioè una forma contenente una serie di coordinate-punti e una serie di coordinate-rette.

Sia dato il connesso $a_x^n u_\alpha^m = 0$. Consideriamo la retta dei punti y e z, e il punto delle rette v e w, e poniamo la condizione che quella retta e questo punto appartengano al connesso. Ponendo allora, come sopra,

$$a_y = A_1 \quad , \qquad a_z = A_2$$
$$v_\alpha = \mathrm{A}_1 \quad , \qquad w_\alpha = \mathrm{A}_2$$

si ha

$$A_\lambda^n \, \mathrm{A}_\mu^m = 0$$

dove le λ e le μ sono variabili binarie.

Mediante questa relazione ad ogni retta u corrispondono m punti di una retta e ad ògni punto x corrispondono n raggi di un fascio.

Sia Π un invariante di questa forma binaria a due serie di variabili, invariante la cui forma simbolica non contenga alcun determinante del tipo $(A\,\mathrm{A})$; mutiamo, come sopra, in esso ogni determinante $(A\,B)$ in un determinante $(a\,b\,u)$, e ogni

determinante $(A\,B)$ in un determinante $(\varkappa\,\beta\,x)$; avremo un espressione composta di fattori simbolici $(a\,b\,u)$ e $(\varkappa\,\beta\,x)$, che sarà una forma invariantiva del connesso dato, e che eguagliata a zero rappresenterà, per ogni punto x, una curva le cui tangenti segano la corrispondente curva del connesso dato in n punti aventi speciali proprietà proiettive; e per ogni retta u, una curva dai cui punti condotte le m tangenti alla corrispondente curva del connesso dato, il fascio di tali m rette ha altre speciali proprietà proiettive.

Il *principio di trasporto* fu enunciato da Clebsch (*Crelle*, LIX; *Geom.*); vedi anche Gundelfinger (*Math. Ann.*, VI), e Study (*Methoden*, etc. Leipzig, 1889).

§ 3. — I connessi. Le coincidenze.

Abbiamo già detto nei paragrafi precedenti che la figura rappresentata simbolicamente da

$$a_x^n\;u_\alpha^m = 0$$

si dice *connesso* di n^{mo} ordine, e m^{ma} classe.

Il connesso suole indicarsi col simbolo (n, m).

Ad ogni punto x corrisponde una curva in coordinate tangenziali, di m^{ma} classe; e ad ogni retta corrisponde una curva in coordinate-punti, di $n.^{mo}$ ordine.

Fra i connessi è notevole quello la cui equazione è $u_x = 0$. Esso si dice *connesso identico*.

Si dice *elemento del connesso* l'assieme di un punto e di una retta che nel connesso si corrispondono.

Se un *punto* è tale che ad esso corrispondono tutte le rette del piano, esso si dice *fondamentale*; e così *retta fondamentale* del connesso è quella cui corrispondono tutti i punti del piano.

L'insieme degli elementi, in numero doppiamente infinito, che sono comuni a due connessi, forma una *coincidenza.*

In una coincidenza a ciascuna retta corrisponde un numero finito ν di punti, e a ciascun punto un numero finito μ di rette; i numeri ν, μ si dicono *ordine e classe della coincidenza.*

La coincidenza che un connesso dato ha comune col connesso identico $u_x = 0$ si dice *coincidenza principale del connesso.*

Dati due connessi (n, m), (n', m'), l'ordine e la classe della corrispondente coincidenza sono dati da

$$\nu = n n' , \qquad \mu = m m'.$$

Dato un punto x, le μ rette della coincidenza si trovano cercando le tangenti comuni delle curve che nei due connessi corrispondono a quel punto; similmente per i ν punti corrispondenti ad una retta.

L'insieme degli elementi comuni a tre connessi forma *una coppia di curve.* Eliminando fra le equazioni dei tre connessi, le x, si ha l'equazione di una curva in coordinate-rette, e eliminando le u, si ha l'equazione di una curva in coordinate-punti. *La classe della prima curva è data da*

$$m n' n'' + m' n'' n + m'' n n'$$

e l'ordine della seconda da

$$n\,m'\,m'' + n'\,m''\,m + n''\,m\,m'$$

se $(n\,m)$ $(n'\,m')$ $(n''\,m'')$ sono i tre connessi.

Il numero degli elementi (punto e retta corrispondenti) comune a quattro connessi $(n\,m)$ $(n'\,m')$ $(n''\,m'')$ $(n'''\,m''')$ è

$$m\,m'\,n''\,n''' + m'\,m''\,n'''\,n + m''\,m'''\,n\,n' +$$
$$+ m\,m''\,n'\,n''' + m'\,m'''\,n''\,n + m\,m'''\,n''\,n'.$$

Si chiama *connesso coniugato* del dato un connesso che rispetto al dato ha la seguente relazione invariantiva: Ogni suo elemento $(y,\ v)$ ha la proprietà che al punto y corrisponde nel connesso dato almeno una retta *doppia*, e alla retta v corrisponde nel connesso dato almeno un punto *doppio.*

La formazione dell'equazione del connesso coniugato si ottiene adoperando il principio di trasporto (v. § 2). Bisognerà formare il discriminante della equazione doppiamente binaria (adoperando le stesse notazioni del § 2.)

$$\varphi \equiv A_{\lambda}^{n}\ \mathrm{A}_{\mu}^{m}, \qquad (n,\ m > 1)$$

cioè l'invariante che eguagliato a zero dà la condizione perchè tale forma abbia contemporaneamente una radice doppia in λ e una radice doppia in μ, * indi mutare col principio di trasporto ogni

---

* Cioè che esistano due valori λ_1 μ_1, di λ e μ, tali che λ_1 sia radice doppia di $\varphi(\lambda, \mu_1) = 0$, e μ_1 sia radice doppia di $\varphi\,(\lambda_1, \mu) = 0$.

determinante binario in uno ternario. *Tale invariante si ottiene eliminando* $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2$ *fra le equazioni*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2} = 0.$$

Il suo grado è $2\,[m\,n + 2\,(m-1)\,(n-1)]$.

Se uno dei numeri n, m, *p. es.* m *è eguale ad 1, allora*

$$\varphi = A_\lambda^n\, A_\mu = P_1\,\mu_1 + P_2\,\mu_2$$

e l'invariante richiesto è il risultante di P_1 *e* P_2.

Il connesso coniugato del connesso (1, 1), $a_x\,u_\alpha = 0$ *è:*

$$(a\,b\,u)\,(\alpha\,\beta\,x) = 0.$$

Il connesso coniugato del connesso (2, 1) $a^2_x\,u_\alpha = 0$ *è:*

$$(a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(\beta\,\gamma\,x)\,(\alpha\,\delta\,x) = 0.$$

Il connesso coniugato del connesso (2, 2), $a^2_x\,u^2_\alpha = 0$ *è:*

$$(W + 3\,U^2)^3 - 27\,(U\,W - U^3 - V^2)^2 = 0$$

dove

$$U = -\frac{1}{12}\,(a\,b\,u)^2\,(\alpha\,\beta\,x)^2$$

$$V = -\frac{1}{12}\,(a\,b\,u)\,(b\,c\,u)\,(c\,a\,u)\,(\alpha\,\beta\,x)\,(\beta\,\gamma\,x)\,(\gamma\,\alpha\,x)$$

$$W = \frac{1}{8}\,(a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(\alpha\,\gamma\,x)^2\,(\beta\,\delta\,x) - 9\,U^2.$$

Si può dire che in certo modo il connesso coniugato sta al connesso dato, come l'assieme delle tangenti ad una curva sta ai punti della curva stessa.

Il connesso coniugato del coniugato non è altro che il primitivo.

Gli elementi di due connessi, l'uno coniugato dell'altro si corrispondono biunivocamente.

Il numero

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \, \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

è caratteristico per un connesso generale e si chiama GENERE.

In un connesso (1, 2), $a_x u^2_\alpha = 0$ i punti le cui coniche corrispondenti si scindono in due punti formano la curva di 3.° ordine

$$a_x b_x c_x (\alpha \beta \gamma)^2 = 0,$$

e le rette che congiungono fra loro i due punti in cui ciascuna di tali coniche, si scinde, sono le tangenti della curva di 3.ª classe

$$(a b c) (\alpha \beta \gamma) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

mentre le stesse coppie di punti si trovano a loro volta sulla curva di 3.° ordine

$$(a b c) (\alpha \beta x) (\beta \gamma x) (\gamma \alpha x) = 0.$$

Nella coincidenza principale del connesso (1, 2), ad ogni punto x corrispondono due rette passanti per esso, e ad ogni retta corrisponde un punto su essa situate. I punti che in tale coincidenza prin-

cipale corrispondono a due rette coincidenti sono situati su di una curva di 4.° ordine la cui equazione è

$$a_x b_x (\alpha \beta x) = 0.$$

La teoria dei connessi si può dire fondata da CLEBSCH, (v. *le lezioni di Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN).

Il connesso (1, 1) fu studiato da CLEBSCH-GORDAN (*Math. Ann.*, I) e il connesso (1, 2 da GODT (*Diss. Göttingen*, 1873); indi molti risultati di GODT furono generalizzati al connesso (1, n), nelle citate lezioni di Geometria di CLEBSCH-LINDEMANN.

§ 4. — ALCUNE PROPRIETÀ GENERALI SULLE FORME ALGEBRICHE QUALUNQUE. JACOBIANI. HESSIANI. LEGGE D'INERZIA DELLE FORME QUADRATICHE. APOLARITÀ.

Vogliamo raccogliere in questo paragrafo alcune proprietà delle forme algebriche con un numero qualunque di variabili e con grado determinato, ovvero con grado qualunque, ma determinato numero di variabili.

Date r forme di grado qualunque con r variabili, (di specie r) rappresentiamole simbolicamente con

$$a_x^n, \quad b_x^{n'}, \quad c_x^{n''} \ldots$$

adoperando criteri di rappresentazione simbolica analoghi a quelli adoperati per le forme binarie e ternarie.

Fra le più semplici formazioni invariantive di tali forme sono da annoverarsi l'*Jacobiano* o *determinante funzionale delle r forme*, espresso simbolicamente da

$$(a\,b\,c\ldots)\,a_x^{n-1}\;b_x^{n'-1}\;c_x^{n''-1}\ldots$$

e l'*Hessiano di ciascuna forma*, espresso da

$$(a\,a'\,a''\ldots)^2\,a_x^{n-2}\;a'^{\,n-2}_x\ldots$$

dove con $a'\,a''\ldots$ si intendono simboli equivalenti ad a.

Queste formazioni si possono esprimere facilmente mediante le derivate delle forme date (vedi *Repertorio*, I, pag. 68-71).

Un teorema importante sugli Jacobiani è il seguente di Clebsch:

I determinanti funzionali formati cogli r determinanti funzionali di $r+1$ *forme di r variabili sono proporzionali alle forme primitive* (Clebsch, *Crelle* LXIX, LXX; Rosanes, *Id.* LXXV, Pasch, *Id.* LXXX).

Una proprietà interessante degli *Hessiani* è quella che si riferisce al loro identico annullarsi.

Solo per le forme binarie, ternarie e quaternarie sussiste il teorema:

L'annullarsi dell'Hessiano è condizione necessaria e sufficiente perchè la forma data si possa con trasformazione lineare, ridurre ad un'altra

con una variabile di meno. Questo teorema era stato creduto vero in generale da Hesse (*Crelle*, XLII, LVI) e da altri Baltzer, *1.ª ediz. del trattato sui determinanti;* Salmon-Fiedler, *Alg. der lin. Transf.* 1863); fu poi dimostrato vero solo per $r = 2, 3, 4$ da Gordan-Noether *(Math. Ann. X)* (v. anche per altri particolari il § 65 del mio trattato sui determinanti).

Un'altra proprietà degli Hessiani è la seguente: *L'Hessiano dell'Hessiano di una forma cubica a quantesivoglia variabili è una combinazione lineare della forma data e del proprio Hessiano.*

Questo teorema fu dimostrato per il campo ternario in Bauer (*Münch. Akad.*, XIV, 1883), per il campo quaternario in Rohn (*Math. Ann.*, XXIII) e pel caso generale si trova in Voss (*Math. Ann.*, XXVII).

L'Hessiano di una forma quadratica qualunque

$$f = \sum_{ij}^{1\ldots n} a_{ij} x_i x_j ,$$

è il suo discriminante, di cui la espressione mediante i coefficienti effettivi è

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} .$$

Il sistema completo di una sola forma quadratica, di specie qualunque, è formato oltrecchè di Δ,

del contravariante:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

dove le u sono le variabili contragredienti alle x, cioè che nella trasformazione lineare, si comportano come i determinanti minori della matrice formata con $r-1$ serie diverse di variabili di specie r.

Se $f=0$ si interpreta come la equazione di una varietà di 2.° ordine nello spazio a $r-1$ dimensioni, il contravariante $F=0$ darà la equazione della stessa varietà, espressa nell'elemento duale al punto in quello spazio.

Per gli invarianti simultanei di due quadratiche a r variabili si vegga Segre *(Math. Ann.* XXIV).

Una forma quadratica può in infiniti modi ridursi ad una combinazione lineare di quadrati (forma canonica):

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_r x_r^2$$

Se tale riduzione la si vuol fare con sostituzione ortogonale, cioè in modo che resti inalterata la forma speciale

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2,$$

allora i coefficienti $A_1 A_2 \ldots$ della forma ridotta,

sono, col segno contrario, le radici λ *dell'equazione*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda, & a_{12}, & a_{13}, & \dots \\ a_{21}, & a_{22}+\lambda, & a_{23}, & \dots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}+\lambda, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Se i coefficienti a_{ij} *sono tutti reali, le radici* λ *di tale equazione sono reali.*

Per la trasformazione delle forme quadratiche in un'espressione lineare di quadrati, è interessante il teorema conosciuto sotto il nome di *legge d'inerzia delle forme quadratiche.*

Se una forma quadratica di r variabili a coefficienti reali, si trasforma, con sostituzioni lineari reali, in due modi diversi in espressioni contenenti i soli quadrati delle variabili, il numero dei termini con segno positivo è sempre il medesimo.

Questo teorema fu enunciato da SYLVESTER (*Phil. Mag.*, 1852, II, pag. 138; *Phil. Trans.*, 1853, pag. 407); indi BORCHARDT fece sapere (*Crelle*, LIII, pag. 275) che una legge simile era già conosciuta da JACOBI fin dal 1847. Sullo stesso teorema si può vedere HERMITE (*Crelle*, LIII, pagina 271), GUNDELFINGER (*Crelle*, XCI), PRESLE (*Soc. math.*, XV, pag. 179) etc.

La teoria dell'*apolarità* da noi esposta per il caso delle forme binarie (v. Cap. II) si può estendese al caso delle forme qualunque.

Si abbiano due forme di r variabili, l'una in coordinate x, a_x^n di ordine n, l'altra in coordinate

contragredienti u, u_α^n della medesima classe n. Si dirà che le due forme sono *coniugate* (ROSANES, *Crelle* LXXV) ovvero *apolari* REYE, *Math. Ann.* IV) se è zero l'invariante bilineare a_α^n.

Della forma data si prenda la prima polare rispetto ad un polo y, poi di essa la polare rispetto ad un polo z, e così di seguito, sino ad ottenere la polare mista

$$a_y \, a_z \, a_t \ldots$$

lineare in ciascuna delle serie di variabili

$$y, z, t, \ldots$$

Se tale polare mista è zero, la forma data è apolare con quella che in coordinate u rappresenta l'assieme degli n poli y, z, t, ... Si ha così l'apolarità di una forma *con un'altra decomposta in n fattori*. L'ennagono formato cogli n punti

$$y, z, t, \ldots$$

si dice *ennagono polare* rispetto alla varietà geometrica rappresentata da $a_x^n = 0$.

Gli n vertici dell'ennagono polare possono indefinitamente variare; dati $n - 1$ di essi, l'ultimo non è neanche determinato in modo unico, perchè esso evidentemente si trova sulla varietà lineare la cui equazione (in x) è:

$$a_y \, a_z \, a_t \ldots a_x = 0;$$

per le forme binarie invece ciò non si verificava.

Si possono però trovare dei gruppi di $n+1$ punti tali che ogni gruppo di n punti in esso contenuto, costituisca i vertici di un ennagono polare. (Per $n=2$, e $r=3$, questo teorema corrisponde a quello dei triangoli autoconiugati rispetto ad una conica; vedi cap. IV.)

Limitandoci al solo campo ternario ($r=3$) si ha:

Una forma ternaria di ordine n si può esprimere mediante le n^{me} potenze di

$$\frac{n(n+1)}{1.2}$$

forme lineari, che corrispondono alle rette che congiungono a due a due gli $n+1$ punti indicati.

Questo teorema serve a dare un' interessante applicazione alla teoria dell'apolarità di una forma rispetto ad altre decomponibili in fattori lineari.

Per due forme quadratiche a^2_x, u^2_α di r variabili, *non decomponibili in fattori lineari*, è notevole il seguente teorema di Hesse (*Crelle*, XLV):

L'apolarità delle due forme a^2_x, u^2_α è la condizione perchè con una trasformazione lineare, una delle forme si riduca a contenere solo i quadrati delle variabili, e l'altra solo i prodotti.

Per la teoria dell'*apolarità,* rimandiamo oltre che alle opere già citate qui e nel cap. II, anche ai lavori di Franz Meyer (*Apolarität.* ecc. Tübingen, 1883; e *Bericht über Invariantenth.*, Jahresb. der deutsch. Math. Vereinigung, I, 256).

CAPITOLO IV.

Le coniche.

§ 1. — Generazione proiettiva delle coniche. Proprietà che ne dipendono immediatamente.

La teoria delle coniche può essere trattata con metodo sintetico proiettivo, e con metodo analitico.

Con metodo proiettivo le coniche possono essere definite nel seguente modo:

S'immaginino due piani omologici (v. Cap. I) sovrapposti o no, col centro S e coll'asse s d'omologia. Ai punti di un cerchio situati in un piano, corrispondono nell'altro piano i punti di una curva che si chiama *conica* e che ha le due proprietà fondamentali cioè:

1 *Ogni retta del suo piano la sega in due punti, o in un punto solo o in nessuno;*

2) *Da ogni punto del piano si possono condurre ad essa due tangenti, o una, o nessuna.*

Da questa definizione risulta quest' altra, che è quella che si poneva a fondamento di tutta la teoria, dagli antichi geometri greci: la conica è la

curva generata dalla intersezione di un piano con un cono circolare; il cerchio e la conica sono così collocati in posizione prospettiva.

Le tangenti al cerchio corrispondono alle tangenti alla conica.

Se nel primo dei due piani omologici la retta limite (retta che corrisponde alla retta all'infinito del secondo piano) sega il cerchio in due punti, la conica corrispondente avrà due punti reali all'infinito e si chiama IPERBOLE; *se la retta limite è tangente al cerchio, la conica ha un sol punto reale all'infinito e si chiama* PARABOLA, *e se infine la retta limite non taglia il cerchio, la conica non ha punti reali all'infinito e si chiama* ELLISSE.

Definendo le coniche come le curve intersezioni di un piano con un cono a base circolare, cioè come la figura prospettiva di un cerchio, le tre distinzioni di coniche corrispondono alle tre diverse posizioni che può assumere, rispetto al cono, il piano segante; questo cioè può o tagliare tutte le generatrici *(ellisse)*, o essere parallelo ad *una* generatrice *(parabola)*, o essere parallelo a *due* generatrici *(iperbole)*.

Un'altra definizione proiettiva delle coniche è la seguente:

Si abbiano in un piano due fasci di raggi proiettivi, a centri distinti O, O'. Le intersezioni dei raggi corrispondenti formano una CONICA *che passa per i due centri dei fasci, e che ha per tangente in questi punti la retta corrispondente alla congiungente O O'.*

Correlativamente;

Si abbiano in un piano due punteggiate proiettive, a sostegni distinti. Le rette che congiungono i punti corrispondenti sono le tangenti di una CONICA *che tocca le due rette date nei punti che corrispondono alla loro comune intersezione.*

Un'altra definizione delle coniche è anche la seguente, per la quale occorrono le considerazioni del Cap. I, § 3:

Una conica è il luogo dei punti uniti di una dualità involutoria o polarità.

Ovvero anche:

Una conica è l'inviluppo delle rette unite di una polarità.

La parabola ha per tangente la retta all'infinito del piano.

Vi sono due rette del piano, le quali si incontrano a distanza finita, e che sono tangenti all'iperbole nei suoi due punti all'infinito. Tali rette si chiamano *assintoti* dell'iperbole.

Se il centro O' è all'infinito in una data direzione il raggio del fascio (O') che corrisponde al raggio di (O) parallelo alla data direzione, potrà essere al finito o all'infinito; nel primo caso si ha un'iperbole, nel secondo una parabola.

Se ambedue i centri O, O' sono all'infinito in due diverse direzioni, la conica è una iperbole.

Le rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti in due punteggiate simili, inviluppano una parabola.

Da queste definizioni risulta subito:

Il rapporto anarmonico delle quattro rette che da quattro punti della conica vanno ad un punto variabile della stessa è costante (tal rapporto suol

chiamarsi RAPPORTO ANARMONICO DEI QUATTRO PUNTI DELLA CONICA).

Il rapporto anarmonico dei quattro punti in cui quattro tangenti di una conica sono segate da una tangente variabile è costante al variare di questa (RAPPORTO ANARMONICO DELLE QUATTRO TANGENTI DELLA CONICA).

Il rapporto anarmonico di quattro tangenti di una conica è eguale a quello dei quattro punti di contatto.

Le tangenti di una parabola segano due tangenti fisse della stessa, in punti costituenti due punteggiate simili.

Due tangenti fisse di una parabola sono segate da tutte le altre tangenti in parti proporzionali.

Le rette che congiungono i punti corrispondenti di due punteggiate simili situate in un piano, inviluppano una parabola tangente alle due rette che sono sostegni delle punteggiate.

In una conica, il prodotto dei segmenti che una tangente variabile determina in due tangenti parallele fisse, a partire dai loro punti di contatto, è costante.

§ 2. — Proprietà fondamentali proiettive delle coniche. Teoremi di Pascal, Brianchon, Desargues.

Se un esagono è iscritto in una conica, le tre coppie di lati opposti si segano in tre punti di una stessa retta (teor. di PASCAL (1640)).

Se un esagono è circoscritto ad una conica, le rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti concorrono in uno stesso punto (teor. di Brianchon (1806)).

Se due triangoli sono omologici, i punti nei quali i lati dell'uno segano i lati non corrispondenti dell'altro, appartengono ad una conica, e le rette che dai vertici dell'uno vanno ai vertici non corrispondenti dell'altro toccano un'altra conica (teor. di Steiner).

Se un triangolo si deforma in modo che i suoi lati ruotino intorno a punti fissi, mentre due vertici scorrano su due rette fisse, il terzo vertice descrive una conica (teor. di Maclaurin (1721)).

Se un triangolo si deforma in modo che i suoi vertici scorrano su rette fisse, mentre due lati rotino intorno a punti fissi, il terzo lato inviluppa una conica.

Se un pentagono è iscritto in una conica, il punto d'incontro di due lati non consecutivi, quello d'incontro di altri due lati non consecutivi, e il punto d'incontro del quinto lato colla tangente nel vertice opposto sono in linea retta e correlativamente.

Se un quadrangolo è iscritto in una conica il punto comune alle tangenti in due vertici opposti è in linea retta coi due punti d'incontro delle coppie di lati opposti.

Il quadrilatero completo formato da quattro tangenti di una conica, e il quadrangolo completo formato dai quattro punti di contatto, hanno il medesimo triangolo diagonale (v. Cap. II).

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica,

le rette che uniscono i punti di contatto di due lati opposti, passano pel punto comune alle diagonali. Per questo punto passano anche le diagonali del quadrilatero iscritto e avente per vertici i quattro punti di contatto dei quattro lati del primo, e le quattro diagonali formano un gruppo armonico. Infine i punti d'incontro delle coppie di lati opposti dei due quadrilateri, stanno in linea retta, e formano anche un gruppo armonico.

Se un triangolo è iscritto in una conica, le tangenti nei vertici incontrano i lati opposti in punti in linea retta.

Se un triangolo è circoscritto ad una conica le rette che dai vertici vanno ai punti di contatto dei lati opposti concorrono in un punto.

Una trasversale incontra una conica e i lati opposti di un quadrangolo iscritto in tre coppie di punti coniugati in involuzione (teor. di Desargues*) e correlativamente.*

Se un quadrangolo, restando sempre iscritto in una conica, si deforma in modo che tre dei suoi lati ruotino intorno a tre punti fissi in linea retta, anche il quarto roterà intorno ad un altro fisso della stessa retta.

In un triangolo circoscritto, ogni lato è diviso armonicamente dal suo punto di contatto e dalla retta che unisce i punti di contatto degli altri due, e correlativamente per un triangolo iscritto.

Se la corda di contatto di due tangenti passa pel punto di concorso di due altre tangenti, le prime sono separate armonicamente dalle altre due, e reciprocamente.

Se due tangenti di una conica concorrono in un punto della corda di contatto di due altre, viceversa il punto d' incontro di queste, sarà sulla corda di contatto delle due prime.

Il punto d' incontro *S* di due tangenti, e la corda di contatto *s* si chiamano rispettivamente *polo e polare*, cioè *S* si dice *polo* di *s* e *s polare* di *S*.

Il polo e la polare rispetto ad una conica coincidono col polo e la polare in una polarità di cui la conica è il luogo dei punti uniti.

La polare s di un punto S può anche definirsi come il luogo del punto d'incontro delle coppie di lati opposti d'un quadrangolo iscritto, le cui diagonali passino per *S*, ovvero il luogo di un punto separato armonicamente da *S* e dalla conica.

La polare di un punto della conica è la tangente in esso.

Se un punto si muove su di una retta, la sua polare rota intorno ad un punto.

Due punti di cui ciascuno stia sulla polare dell'altro si dicono *coniugati o reciproci rispetto alla conica*, e così due rette di cui ciascuna passi pel polo dell'altra si dicono *coniugate o reciproche.*

Se due punti sono reciproci anche le loro polari sono reciproche.

Un triangolo di cui ciascun vertice è il polo del lato opposto si dice un *triangolo autoconiugato rispetto alla conica.*

I punti diagonali del quadrangolo completo formato da quattro punti di una conica, formano un triangolo coniugato; e correlativamente, le rette diagonali del quadrilatero completo formato da

quattro tangenti di una conica, formano un triangolo coniugato.

Se un triangolo è iscritto in una conica, una retta reciproca (rispetto alla conica) ad un lato, taglia gli altri due lati in due punti reciproci (Staudt).

Se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo si compongono di punti reciproci in una polarità (v. Cap. I, § 3) *rispetto ad una conica reale o immaginaria, anche i rimanenti due vertici opposti saranno reciproci in quella polarità* (Hesse).

Se due triangoli sono polari l'uno dell'altro in una polarità, essi sono omologici, e viceversa due triangoli omologici sono polari l'uno dell'altro in una polarità.

Per due triangoli ognuna delle tre proprietà seguenti ha per conseguenza le altre due:

1.° *Che sieno coniugati a sè stessi (autoconiugati) in una stessa polarità;*

2.° *Che sieno iscritti in una stessa conica;*

3.° *Che sieno circoscritti ad una stessa conica.*

§ 3. — Formole principali di geometria analitica delle coniche.

La definizione analitica delle coniche è la seguente:

Sieno $x_1\, x_2\, x_3$ le coordinate omogonee di un punto del piano.

La *conica* è il luogo geometrico rappresentato analiticamente da una relazione di 2.° grado fra

le x del tipo

$$f(x) = \sum_{1}^{3} a_{ij}\, x_i\, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

dove $a_{11}, a_{22}, \ldots$ sono coefficienti costanti *(equazione della conica).*

Perciò le coniche si sogliono anche chiamare *luoghi di 2.° ordine.*

Se il triangolo fondamentale delle coordinate è un triangolo autoconiugato l'equazione della conica si riduce alla forma canonica $\Sigma\, a_i \,.\, x^2_i = 0$.

Supponiamo ora invece che u_1, u_2, u_3 sieno le coordinate omogenee di una retta del piano; una simile relazione di 2.° grado fra le u rappresenterà un *inviluppo* (cioè una curva che ha per tangenti tutte le rette le cui coordinate soddisfanno a quella relazione, v. Cap. I, pag. 41) che è anche una *conica;* perciò si dice che questa è anche *un inviluppo di 2.ª classe.*

La equazione in coordinate di *punti* si suol chiamare *equazione puntuale*, e quella in coordinate di rette, *equazione tangenziale.*

Dall'equazione della conica risulta che essa è determinata fissando i valori dei rapporti di *cinque* coefficienti dell'equazione, all'ultimo.

Una conica è determinata in un numero finito di modi se sono dati r punti per cui deve passare e s rette che deve toccare, dove $r + s = 5$.

Propriamente:

Per 5 punti passa una sola conica.

Per 4 punti passano due coniche tangenti ad una retta data.

Per 3 punti passano quattro coniche tangenti a due rette date.

Per 2 punti passano quattro coniche tangenti a tre rette date.

Per un punto passano due coniche tangenti a quattro rette date.

Vi è una sola conica tangente a cinque rette date.

Poniamo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textit{(Discriminante)}$$

e chiamiamo A_{ij} i complementi algebrici degli elementi di questo determinante; chiamiamo poi B il complemento A_{33}.

L'equazione della conica in coordinate cartesiane x, y, si ottiene dall'equazione generale della pag. 132, ponendo $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Sia ω l'angolo dei due assi cartesiani obliqui, e poniamo inoltre:

$$C = a_{11} + a_{22} - 2\, a_{12} \cos \omega.$$

Si ha allora il seguente risultato importante:

Per qualunque trasformazione di coordinate cartesiane le espressioni

$$\frac{A}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{B}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

restano inalterate (sono invarianti).

Di qui si ha:

Per qualunque trasformazione di coordinate cartesiane le quantità A, B, C conservano sempre il loro segno.

Per il caso di coordinate ortogonali la quantità C diventa $a_{11} + a_{22}$; dunque:

Passando da assi ortogonali ad altri anche ortogonali, la quantità $a_{11} + a_{22}$ resta inalterata.

Secondo i valori dei coefficienti (che si suppongono *reali*) il luogo rappresentato dall'equazione di 2.° grado, avrà forme diverse. Mantenendo le definizioni di poc'anzi cioè quelle di *ellisse*, *parabola*, *iperbole* (vedi sopra) si hanno i seguenti risultati:

Supposto A diverso da zero, se è $B > 0$, si ha un'ellisse, se è $B > 0$ si ha un'iperbole, se è $B = 0$ si ha una parabola.

Nel caso $B > 0$ l'ellisse è formata di punti reali solo quando è $A a_{11} < 0$ e $A a_{22} < 0$ (queste due disuguaglianze sono, essendo $B > 0$, l'una conseguenza dell'altra); in altro caso si ha un'ellisse i cui punti sono immaginari (ellisse immaginaria); nei casi poi $B < 0$ ovvero $B = 0$ si ha sempre una iperbole o una parabola reale, purchè A sia diverso da zero.

Finalmente se $A = 0$ si ha in ogni caso una coppia di rette, e non più una conica propria; questa coppia è di rette immaginarie incontrantisi in un punto reale a distanza finita se è $B > 0$; è di rette reali incontrantisi in un punto reale a distanza finita, se è $B < 0$, ed è infine di due rette parallele reali o immaginarie, ovvero di due rette coincidenti in un' unica retta reale, se $B = 0$.

Se la conica è ellisse reale, la sua equazione (in coord. non omog.) potrà con spostamento degli assi

coordinati, porsi sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

e se è ellisse immaginaria la sua equazione può ridursi a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Se la conica è iperbole, la sua equazione potrà ridursi, con spostamento di assi, alla forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se la conica è parabola, la sua equazione potrà ridursi alla forma semplice

$$y^2 = p\,x.$$

Un'equazione generale di 2.° grado (del solito tipo) in cui i termini a secondo grado formano un quadrato perfetto, rappresenta una parabola (se A è diverso da zero).

Un'equazione omogenea, razionale, intera, di 2.° grado fra x e y rappresenta una coppia di rette passanti per l'origine.

Perchè l'equazione di 2.° grado rappresenti una coppia di rette è necessario che il suo primo membro si scinda in due fattori razionali interi di 1.° grado in x e y.

L'equazione generale di 2.° grado rappresenta un cerchio quando, essendo A diverso da zero, è

$a_{22} = a_{11}$ *e* $a_{12} = a_{11} \cos \omega$ *essendo* ω *l'angolo degli assi. Il cerchio sarà reale o immaginario secondochè è* $A\, a_{11} < 0$ *ovvero* $A\, a_{11} > 0$.

Per assi ortogonali, deve quindi essere

$$a_{11} = a_{22} \quad a_{12} = 0.$$

L'equazione del cerchio per assi ortogonali, può porsi sotto la forma

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

dove α, β *sono le due coordinate del centro, e* r *è il raggio; per assi obliqui l'equazione del cerchio può invece ridursi alla forma*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2\,(x - \alpha)\,(y - \beta) \cos \omega = r^2$$

essendo ω *l'angolo degli assi.*

Data l'equazione generale del cerchio

$$a_{11}\,(x^2 + \cos\omega\; x\,y + y^2) + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0$$

le coordinate del centro sono

$$\alpha = \frac{-\,a_{13} + a_{23} \cos \omega}{a_{11} \operatorname{sen}^2 \omega}$$

$$\beta = \frac{a_{13} \cos \omega - a_{23}}{a_{11} \operatorname{sen}^2 \omega}$$

e il raggio è dato da

$$r^2 = \frac{a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2 - 2\,a_{13}\,a_{23} \cos\omega - a_{11}\,a_{33} \operatorname{sen}^2\omega}{a_{11}{}^2 \operatorname{sen}^2 \omega},$$

Un' iperbole in cui gli assintoti sono ortogonali si dice *iperbole equilatera.*

Per l'iperbole equilatera deve essere

$$a_{11} + a_{22} - 2\,a_{12} \cos \omega = 0.$$

Tutti i cerchi del piano sono segati dalla retta all'infinito nei due medesimi punti immaginari, che si dicono PUNTI CICLICI *del piano.*

Una conica è cerchio se passa per i due punti ciclici.

L'equazione tangenziale dei due punti ciclici è

$$u^2 + v^2 = 0.$$

I coefficienti angolari delle tangenti al cerchio in tali punti sono $\operatorname{tg} \alpha = \pm\, i = \pm \sqrt{-1}$; perciò: *le tangenti di tutti i cerchi nei punti ciclici sono da considerarsi tutte parallele.*

L'angolo α *è da considerarsi infinitamente grande.*

L'equazione della tangente alla conica in un punto di coordinate $x'\,y'$ *è*

$$(a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13})\,x + (a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23})\,y + \\ + (a_{31}\,x' + a_{32}\,y' + a_{33}) = 0.$$

La normale, cioè la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto, ha per equazione

$$\frac{x - x'}{a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}} = \frac{y - y'}{a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}}\,.$$

Indicando con $f(x\,y)$ il primo membro della equazione della conica, *le tangenti che da un punto*

$x' y'$ possono condursi alla conica sono reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie, secondochè il prodotto

$$A f(x' y')$$

è negativo, nullo, o positivo.

La condizione perchè la retta di equazione

$$u x + v y + 1 = 0$$

sia tangente alla conica data dalla solita equazione, è

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$$

dove A_{11}, A_{22}, ... sono i complementi algebrici degli elementi omonimi nel determinante A.

Se $u\,v$ si interpretano come coordinate di rette, la precedente relazione è la *equazione tangenziale della conica.*

La equazione

$$(a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}) x + (a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23}) y + \\ + (a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33}) = 0$$

dove $x' y'$ non siano più le coordinate di un punto della curva, ma in generale di un qualunque punto del piano, rappresenta la *polare* (v. § 2) del punto $x' y'$ *(polo)* rispetto alla curva.

Perchè due punti $(x' y')$ $(x'' y'')$ *sieno coniugati* (v. § 2) *deve verificarsi la condizione*

$$a_{11} x' x'' + a_{12}(x' y'' + x'' y') + a_{22} y' y'' + \\ + a_{13}(x' + x'') + a_{23}(y' + y'') + a_{33} = 0.$$

Il polo della retta

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

ha per coordinate

$$x' = \frac{A_{11}\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}, \quad y' = \frac{A_{12}\lambda + A_{22}\mu + A_{32}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}.$$

La condizione perchè due rette

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0$$
$$\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' = 0$$

sieno coniugate è

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu'' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \nu'' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Il luogo dei punti medii di un sistema di corde parallele a una stessa direzione è una retta, che si chiama DIAMETRO *della conica.*

Il diametro è la polare del punto all'infinito nella direzione delle corde bisecate da esso.

Tutti i diametri passano per un punto che si chiama CENTRO *della conica. Ogni retta passante pel centro è un diametro.*

Il centro è il polo della retta all'infinito del piano.

Le tangenti nei punti ove un diametro seca la curva sono parallele alle corde da esso bisecate.

Se l'origine delle coordinate è il centro della conica, l'equazione di questa mancherà dei termini a primo grado nelle coordinate.

L'equazione del diametro che biseca le corde parallele alla retta $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ *è*

$$(a_{11} m + a_{12} n) x + (a_{21} m + a_{22} n) y + (a_{31} m + a_{32} n) = 0.$$

In particolare, *i diametri che bisecano le corde parallele agli assi sono:*

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0$$
$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} = 0.$$

Nella parabola il centro è all'infinito, e quindi tutti i diametri sono paralleli.

Le coordinate $x_0\, y_0$ *del centro di una conica sono*

$$x_0 = \frac{a_{23}\, a_{21} - a_{22}\, a_{13}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}$$

$$y_0 = \frac{-a_{13}\, a_{11} + a_{12}\, a_{13}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}.$$

Nell'ellisse e nell'iperbole due *diametri* si dicono *coniugati* se l'uno biseca le corde parallele all'altro.

Le infinite coppie di diametri coniugati formano una involuzione, di cui i raggi doppi sono gli assintoti (reali nell'iperbole, immaginarii nell'ellisse).

*Fra i coefficienti angolari** $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ *di due diametri coniugati sussiste la relazione*

$$a_{11}\, m\, m' + a_{12}\, (m\, n' + m'\, n) + a_{22}\, n\, n' = 0.$$

* Propriamente si suol chiamare coefficiente angolare di una retta, il rapporto (col segno contrario) fra i coefficienti

Il coefficiente angolare dei diametri della parabola è

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \text{ovvero} \quad -\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

I coefficienti angolari $\frac{m}{n}$ *dei due assintoti dell'iperbole sono dati dall'equazione*

$$a_{11}\,m^2 + 2\,a_{12}\,m\,n + a_{22}\,n^2 = 0.$$

L'equazione complessiva delle parallele agli assintoti condotte per l'origine è:

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 = 0.$$

È costante l'area del triangolo formato dalla tangente e dai due assintoti nell'iperbole.

Nell'ellisse e nell'iperbole, fra le infinite coppie di diametri coniugati, ve n'è una formata di diametri fra loro ortogonali: questi due diametri si chiamano ASSI, e VERTICI sono i punti in cui essi incontrano la curva.

Nella parabola vi è un solo diametro perpendicolare alle corde da esso bisecate, e si chiama anche ASSE.

Gli assi sono sempre reali, e sono assi di simmetria per la curva.

Nell'iperbole gli assi sono le bisettrici degli angoli degli assintoti. Uno di essi taglia la curva in

---

di x e y nell'equazione della retta in coordinate cartesiane *ortogonali*. Noi però quì continuiamo ad adoperare la stessa denominazione anche per coordinate *oblique*.

due punti reali e si dice ASSE REALE *o* FOCALE *o* TRASVERSO; l'altro si dice ASSE IMMAGINARIO.

L'equazione complessiva degli assi della conica è

$$(a_{11}\cos\omega - a_{12})(x-x_0)^2 + (a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0) - \\ - (a_{22}\cos\omega - a_{12})(y-y_0)^2 = 0$$

dove ω *è l'angolo degli assi coordinati, e* $x_0\, y_0$ *sono le coordinate del centro.*

L'equazione dell'asse della parabola è

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \\ + \frac{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{23}) + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\cos\omega}{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega} = 0.$$

Se gli assi coordinati sono due diametri coniugati della conica (in particolare coincidono cogli assi stessi della conica) l'equazione di questa avrà la forma

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

le quantità a_1, b_1 *si chiamano le lunghezze dei semidiametri coniugati.*

Se gli assi coordinati sono gli assi della conica, le quantità $a_1\, b_1$ si chiamano *semiassi. Se l'asse incontra la conica, i semiassi sono le distanze del centro dai punti d'incontro.*

Le lunghezze dei semiassi si trovano colle formole

$$\sqrt{-\frac{A}{B\rho_1}},\quad \sqrt{-\frac{A}{B\rho_2}}$$

dove $\rho_1 \rho_2$ *sono le due radici dell'equazione*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} - \rho \cos \omega \\ a_{12} - \rho \cos \omega & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\mathrm{sen}^2 \omega \, . \, \rho^2 - C \, . \, \rho + B = 0 \qquad (v. \; sopra.)$$

L'equazione dell' iperbole riferita agli assintoti è della forma $x\,y + p = 0$.

L' equazione di un'ellisse o iperbole riferita ad un diametro (asse di x*) e alla tangente in un suo estremo (asse di* y*) è del tipo:*

$$a_1 \, x^2 + b_1 \, y^2 + c_1 \, x = 0.$$

L'equazione della parabola in questo ultimo caso è

$$y^2 = p\,x.$$

Il numero p si chiama *parametro* corrispondente al diametro scelto. Se questo è l'*asse*, p si chiamerà *parametro principale.*

L' equazione polare dell' ellisse o iperbole scegliendo per polo il centro è

$$\rho^2 = \frac{a_{22}{}^2}{\pm (1 - e^2 \cos^2 \theta_1)}$$

il segno + per l'ellisse e il segno — per l' iperbole, dove e è la cosiddetta *eccentricità* (v. § 5).

§ 4. — Principali proprietà metriche delle coniche.

Se una conica sega i lati BC, CA, AB di un triangolo nei punti D, D'; E, E'; F, F' si ha la relazione

$$\frac{BD.BD'}{CD.CD'}\cdot\frac{CE.CE'}{AE.AE'}\cdot\frac{AF.AF'}{BF.BF'}=1$$

(teor. di Carnot, *Geom. de posit.* p. 437); *e reciprocamente se i punti D, D', E, E', F, F' sui lati di un triangolo soddisfanno ad una siffatta relazione, essi sono situati su di una conica.*

Nell' ellisse è costante la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati, e nell' iperbole è invece costante la differenza dei quadrati di due semidiametri coniugati.

Nell'ellisse o iperbole è costante l'area del parallelogrammo costruito su due semidiametri coniugati.

Il rettangolo dei segmenti che due diametri coniugati determinano sopra una tangente fissa, a partire dal punto di contatto, è costantemente eguale al quadrato del semidiametro parallelo alla tangente fissa.

Se si costruisce un parallelogrammo su due semidiametri coniugati dell' iperbole, una delle diagonali è un assintoto e l'altra diagonale è parallela al secondo assintoto.

Il rettangolo dei segmenti che una tangente variabile fa su due tangenti fisse parallele, a par-

tire dai loro punti di contatto, è costantemente eguale al quadrato del semidiametro parallelo alle tangenti fisse.

Il rettangolo dei segmenti che due tangenti parallele variabili fanno su di una tangente fissa, è eguale al quadrato del semidiametro parallelo a questa.

Il parallelogrammo costruito sui due semidiametri è equivalente a quello costruito sui due semidiametri rispett. coniugati.

Le due tangenti condotte da un punto alla conica (ellisse o iperbole) sono proporzionali ai semidiametri ad esse paralleli.

Il prodotto dei due segmenti di una secante passante per un punto fisso, è proporzionale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa.

I quadrati di un sistema di corde parallele sono proporzionali ai prodotti dei segmenti da esse determinati sul diametro coniugato alla loro direzione.

I prodotti dei segmenti che una retta parallela a un assintoto nell'iperbole, ovvero che un diametro della parabola, taglia sopra un sistema di corde parallele, sono proporzionali ai segmenti che queste corde staccano da quella retta.

Il prodotto dei segmenti tagliati da una tangente qualunque di un'iperbole sui due assintoti, contati a partire dall'intersezione di questi, ha un valore costante.

L'area del triangolo formata da una tangente all'iperbole e dagli assintoti è costante.

La porzione di una tangente all'iperbole inter-

cetta fra gli assintoti, è divisa per metà dal punto di contatto.

I due segmenti che una iperbole e i suoi assintoti intercettano su di una trasversale, hanno lo stesso punto medio.

Se un quadrangolo è iscritto in una conica, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della curva dai due lati opposti, ha un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati opposti (teor. di PAPPO).

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, il prodotto delle distanze d'una tangente qualunque da due vertici opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze della tangente medesima dagli altri due vertici.

Se intorno a due punti fissi d'una iperbole si fanno girare due raggi che si intersechino costantemente sulla curva, il segmento intercetto da questi raggi sopra un assintoto è di grandezza costante.

Ogni parallelogrammo che abbia due vertici opposti sull'iperbole e i lati paralleli agli assintoti, ha una diagonale diretta al centro.

Nella parabola la sunnormale (distanza fra il piede della perpendicolare abbassata dal punto della parabola sull'asse e il punto d'incontro della normale coll'asse) è costante ed eguale alla metà del parametro principale.

L'area del triangolo formato da tre tangenti alla parabola è la metà di quella del triangolo formato dai loro punti di contatto.

In ogni triangolo iscritto in un'iperbole equilatera il punto d'incontro delle altezze sta sulla curva.

In ogni triangolo rettangolo iscritto in una iperbole equilatera, la tangente al vertice dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa.

Il circolo iscritto ad un triangolo coniugato rispetto ad un'iperbole equilatera, passa pel centro della curva.

§ 5. — Proprietà focali delle coniche.

Esistono in generale quattro punti (reali o immaginarii) tali che tutte le coppie di rette coniugate passanti per ciascuno di essi, sono coppie di rette fra loro ortogonali; tali punti si chiamano FUOCHI.

Per l'ellisse e l'iperbole, di questi fuochi ne esistono due reali, a distanza finita, situati su di un asse, simmetricamente rispetto al centro, e interni alla curva, cioè tali che le tangenti da essi condotte alla curva sono immaginarie.

Per la parabola esiste un sol fuoco reale a distanza finita, situato sull'asse e interno alla curva.

L'asse su cui sono i fuochi reali si chiama *asse focale.*

Chiamando α, β i semiassi dell'ellisse o dell'iperbole *i fuochi reali dell'ellisse stanno sul suo asse maggiore alla distanza* $\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ *dal centro e quelli dell'iperbole stanno alla distanza* $\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *dal centro e situati su quello dei due assi che incontra in punti reali la curva.*

Si chiama *direttrice* la polare di un fuoco.

Nell'ellisse e iperbole ve ne sono due reali e perpendicolari all'asse focale. Nella parabola ve n'è

cetta fra gli assintoti, è divisa per metà dal punto di contatto.

I due segmenti che una iperbole e i suoi assintoti intercettano su di una trasversale, hanno lo stesso punto medio.

Se un quadrangolo è iscritto in una conica, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della curva dai due lati opposti, ha un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati opposti (teor. di PAPPO).

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, il prodotto delle distanze d'una tangente qualunque da due vertici opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze della tangente medesima dagli altri due vertici.

Se intorno a due punti fissi d'una iperbole si fanno girare due raggi che si intersechino costantemente sulla curva, il segmento intercetto da questi raggi sopra un assintoto è di grandezza costante.

Ogni parallelogrammo che abbia due vertici opposti sull'iperbole e i lati paralleli agli assintoti, ha una diagonale diretta al centro.

Nella parabola la sunnormale (distanza fra il piede della perpendicolare abbassata dal punto della parabola sull'asse e il punto d'incontro della normale coll'asse) è costante ed eguale alla metà del parametro principale.

L'area del triangolo formato da tre tangenti alla parabola è la metà di quella del triangolo formato dai loro punti di contatto.

In ogni triangolo iscritto in un'iperbole equilatera il punto d'incontro delle altezze sta sulla curva.

In ogni triangolo rettangolo iscritto in una iperbole equilatera, la tangente al vertice dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa.

Il circolo iscritto ad un triangolo coniugato rispetto ad un' iperbole equilatera, passa pel centro della curva.

§ 5. — Proprietà focali delle coniche.

Esistono in generale quattro punti (reali o immaginarii) tali che tutte le coppie di rette coniugate passanti per ciascuno di essi, sono coppie di rette fra loro ortogonali; tali punti si chiamano FUOCHI.

Per l'ellisse e l'iperbole, di questi fuochi ne esistono due reali, a distanza finita, situati su di un asse, simmetricamente rispetto al centro, e interni alla curva, cioè tali che le tangenti da essi condotte alla curva sono immaginarie.

Per la parabola esiste un sol fuoco reale a distanza finita, situato sull'asse e interno alla curva.

L'asse su cui sono i fuochi reali si chiama *asse focale.*

Chiamando α, β i semiassi dell'ellisse o dell'iperbole *i fuochi reali dell'ellisse stanno sul suo asse maggiore alla distanza* $\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ *dal centro e quelli dell'iperbole stanno alla distanza* $\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *dal centro e situati su quello dei due assi che incontra in punti reali la curva.*

Si chiama *direttrice* la polare di un fuoco.

Nell'ellisse e iperbole ve ne sono due reali e perpendicolari all'asse focale. Nella parabola ve n'è

una sola reale, e anche perpendicolare all' asse focale.

La equazione di una direttrice si otterrebbe sostituendo nella equazione della polare le coordinate di un fuoco.

È costante il rapporto fra le distanze di un punto della curva dal fuoco, e dalla direttrice corrispondente. Esso si chiama ECCENTRICITÀ.

Per l'ellisse l'eccentricità è minore di 1; per la parabola è eguale ad 1; per l' iperbole è maggiore di 1. I punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.

Nell'ellisse la somma dei raggi che da un punto della curva vanno ai due fuochi reali è costante; nell' iperbole è costante invece la differenza degli stessi raggi.

È costante il prodotto delle distanze dei due fuochi da una tangente alla curva.

La tangente e la normale in un punto della curva bisecano gli angoli dei due raggi focali.

Nella parabola la tangente e la normale in un punto bisecano gli angoli del raggio focale e del diametro passante pel punto considerato della curva.

I due fochi reali dell'ellisse sono sull'asse maggiore; e la distanza di uno di essi dal centro è il secondo cateto d'un triangolo rettangolo di cui la ipotenusa è il semiasse maggiore e il primo cateto è l'altro semiasse.

Nell' iperbole la distanza di un fuoco dal centro è l'ipotenusa di quel triangolo rettangolo di cui i cateti sono i semiassi.

Se un'ellisse e un'iperbole passano per lo stesso punto e hanno gli stessi fuochi, esse si tagliano ad angolo retto.

La normale alla conica divide la distanza fra i fuochi in parti proporzionali ai raggi focali.

L'angolo sotteso nel fuoco da una corda è bisecato dalla retta che congiunge il fuoco col polo della corda.

Se si congiunge il fuoco col polo di una corda che passa per il fuoco, questa congiungente è perpendicolare alla corda.

È costante l'angolo sotteso nel fuoco dalla porzione di una tangente variabile compresa fra due tangenti fisse.

Il rettangolo dei segmenti di una corda focale serba un rapporto costante coll'intera corda.

La somma di due corde focali parallele a due diametri coniugati è costante.

La somma delle reciproche di due corde focali ortogonali è costante.

La distanza di un punto di un' iperbole dal fuoco, è eguale alla retta condotta da quel punto parallelamente all'assintoto ed arrestata alla direttrice.

Nella parabola il punto d' incontro d' una tangente coll' asse focale, e il punto di contatto sono equidistanti dal fuoco.

Nella parabola l' angolo di due tangenti è eguale alla metà dell' angolo dei raggi focali corrispondenti ai punti di contatto.

Nella parabola il circolo circoscritto al triangolo formato da tre tangenti passa pel fuoco.

Nella parabola le tre altezze del triangolo for-

mato da tre tangenti si incontrano sulla direttrice.

Nella parabola le due tangenti condotte da un punto della direttrice alla curva, sono ad angolo retto.

Nella parabola il parametro di un diametro qualunque (v. § 3) *è eguale a quattro volte la distanza della sua estremità dal fuoco.*

L'equazione polare dell'ellisse o iperbole scegliendo per polo uno dei fuochi è

$$\rho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

essendo a, b i semiassi ed e l'eccentricità.

L'equazione polare della parabola prendendo per polo il fuoco è

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} p}{1 - \cos \theta}$$

essendo p il parametro principale della parabola.

Se $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *è una conica (ellisse o iperbole), l'equazione di una conica omofocale (avente i medesimi due fuochi reali) è*

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} \pm \frac{y^2}{b^2 + \rho} = 1.$$

Le coniche, considerate come intersezioni di un cono circolare con un piano, furono studiate fin dagli antichi geometri greci, Apollonio, Pappo,

ecc., i quali trovarono quasi tutte le principali proprietà riguardanti i fochi, gli assintoti, i diametri coniugati, ecc.

A Desargues, Pascal, Delahire, Newton, Maclaurin e altri matematici del XVII e XVIII secolo si devono ulteriori studi sulle coniche; a Desargues e a Delahire si deve p. es. l'introduzione sistematica della teoria dei poli e polari e a Biagio Pascal la scoperta di quel famoso teorema (v. § 2), che ha così grande importanza nella geometria proiettiva delle coniche.

L'introduzione del metodo delle coordinate, fatta da Cartesio, servì a studiare queste curve da un punto di vista nuovo e a dimostrare con formole analitiche le proprietà già dimostrate per via sintetica.

Trattati sulle coniche coll'uno o coll'altro metodo sono quelli stessi da noi già citati alla fine del capitolo primo, cui aggiungeremo ora anche il primo volume della *Geometria* di Clebsch-Lindemann, e le lezioni di Steiner (*Vorl. über synthet. Geom.; Theorie der Kegelschnitte*, pubblicate da Geiser (1.ª parte) e da Schroeter (2.ª parte), Leipzig). Per dettagliati ragguagli storici rimandiamo all'*Aperçu hist.* di Chasles.

§ 6. — Fasci di coniche.

Due coniche si tagliano in quattro punti (reali o immaginari), e hanno quattro tangenti comuni.

Se $f=0$, $f'=0$ *sono le equazioni delle due co-*

niche in coordinate di punti (o di rette) la equazione

$$f + \lambda f' = 0,$$

dove λ *è un parametro costante qualunque, rappresenta una conica che passa per i quattro punti d'incontro delle due date, (o rispett. che è tangente alle quattro tangenti comuni alle due date).*

Si dice che tutte le coniche rappresentate dalla equazione $f + \lambda f' = 0$ formano *un fascio* (se $f = 0$, $f' = 0$ sono equazioni in coordinate puntuali) ovvero formano *una schiera* (se $f = 0$, $f' = 0$ sono in coordinate tangenziali).

I quattro punti d'intersezione delle due coniche si chiamano *punti-base del fascio.*

Fra le coniche del fascio ve ne sono tre che si spezzano in due rette; fra le coniche della schiera ve ne sono tre che si riducono a una coppia di punti.

Il triangolo diagonale del quadrangolo completo avente per vertici i quattro punti-base del fascio è un triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche del fascio.

Per ogni punto del piano passa una conica del fascio, e ad ogni retta del piano è tangente una conica della schiera.

Ogni retta del piano è toccata da due coniche del fascio; e per ogni punto del piano passano due coniche della schiera.

I punti d'incontro delle coniche d'un fascio con una retta, formano su questa un'involuzione, i cui punti doppi sono i punti di contatto di quelle due coniche del fascio che toccano la retta. E correlativamente.

Se si ha

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k , \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$
$$f' = \Sigma b_{ik} x_i x_k , \qquad (b_{ik} = b_{ki})$$

il discriminante di una conica del fascio è

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} .$$

Se l'equazione di 3.° grado $\Delta(\lambda) = 0$ *ha una radice doppia, due dei punti-base del fascio coincidono; e il fascio quindi risulta di coniche fra loro tangenti in un punto.*

Se $\Delta(\lambda) = 0$ *ha una radice doppia, e per tal valore di* λ, *tutti i minori di 2.° ordine del determinante* Δ *si annullano, tutte le coniche del fascio (e quindi anche le due date) si toccano in due punti; e la congiungente questi due punti si chiama la retta doppia del fascio.*

In tal caso esistono infiniti triangoli autoconiugati rispetto a tutte le coniche del fascio; tutti questi triangoli hanno di comune un lato cioè la retta doppia.

Se le radici di $\Delta(\lambda) = 0$ *sono tutte tre eguali, senza che per tale radice si annullino i determinanti di 2.° ordine di* Δ, *tutte le coniche del fascio hanno fra loro in un punto un contatto di 2.° ordine (cioè tre punti infinitamente vicini, comuni) e hanno poi comune un altro punto. In tal caso non esiste più triangolo autoconiugato comune, propriamente detto.*

Se finalmente tutte le radici di $\Delta(\lambda) = 0$ sono eguali e contemporaneamente, per tal valore di λ, si annullano i minori di 2.º ordine di Δ, allora le due coniche e quindi anche tutte quelle del fascio, hanno in un punto un contatto di 3.º ordine, cioè le quattro intersezioni si riuniscono in una sola.

§ 7. — Le formazioni invariantive del sistema di una o due forme ternarie quadratiche.

Riferiamo ora i risultati riguardanti la teoria invariantiva delle forme ternarie quadratiche (si vegga il Cap. III).

Il sistema di una sola conica non ha invarianti assoluti, * *il che, geometricamente, corrisponde a dire che colla trasformazione ogni conica può trasformarsi in ogni altra.*

Se a^2_x è la ternaria quadratica, il sistema completo risulta (oltre del covariante identico) di:

$$f = a^2_x, \quad F = (a\,b\,u)^2, \quad A = (a\,b\,c)^2$$

dove $F = 0$ è la equazione della stessa conica in

---

* Non si trovi contraddizione fra questa asserzione e quella del § 3, perchè gli invarianti considerati nel § 3 non dipendono solo dai coefficienti della conica, ma anche dagli assi coordinati, i quali devono restare sempre *assi cartesiani;* quindi le trasformazioni compatibili colle considerazioni del § 3 non sono *tutte* le possibili, ma solo quelle che lasciano fissa la retta all'infinito del piano.

coordinate di rette, e A *rappresenta il discriminante.*

Il sistema completo di due coniche, cioe di due forme a^2_x, a'^2_x *è composto (oltre del covariante identico) di 20 formazioni.*

Ponendo, per semplicità,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

e

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 = \begin{vmatrix} b'_2 & c'_2 \\ b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b'_3 & c'_3 \\ b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b'_1 & c'_1 \\ b'_2 & c'_2 \end{vmatrix}$$

queste formazioni possono scriversi simbolicamente nel seguente modo:

1) Quattro invarianti:

$$A_{111} = (a\,b\,c)^2$$
$$A_{112} = (a\,b\,a')^2$$
$$A_{122} = (a\,a'\,b')^2$$
$$A_{222} = (a'\,b'\,c')^2.$$

2) Quattro covarianti:

$$f = a_x{}^2, \qquad f' = a'_x{}^2$$
$$\Delta = (\alpha\,\alpha'\,x)\,a_{\alpha'}\,a'_\alpha\,a_x\,a'_x$$
$$\Phi_{12} = (\alpha\,\alpha'\,x)^2.$$

3) Quattro contravarianti:

$$F = (a\,b\,u)^2, \qquad F' = (a'\,b'\,u)^2$$
$$D = (a\,a'\,u)\,(a\,b'\,c')\,(a'\,b\,c)\,(u\,b'\,c')\,(u\,b\,c)$$
$$F_{12} = (a\,a'\,u)^2.$$

4) Otto forme miste:

$$B_1 = (a' b c)\, a'_x\, (u b c)$$
$$B_2 = (a b' c')\, a_x\, (u b' c')$$
$$N = (a a' u)\, a_x\, a'_x$$
$$N' = (\alpha \alpha' x)\, u_\alpha\, u_{\alpha'}$$
$$C_1 = (a a' u)\, a'_\alpha\, a_x\, u_\alpha$$
$$\Gamma_1 = (\alpha \alpha' x)\, a_{\alpha'}\, u_\alpha\, a_x$$
$$C_2 = (a a' u)\, a_{\alpha'}\, a'_x\, u_{\alpha'}$$
$$\Gamma_2 = (\alpha \alpha' x)\, a'_\alpha\, u_\alpha\, a'_x .$$

Questo sistema completo fu trovato da GORDAN e si trova riportato nel 1.° volume della *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN (ediz. franc., pag. 362). Vedi anche GORDAN, *Math. Ann.*, XIX.

Il prodotto dei quattro punti d' intersezione di f e f' è dato dalla forma

$$F F' - F_{12}^2 = 0$$

e correlativamente, il prodotto delle quattro tangenti comuni alle due coniche è dato da

$$f \cdot f' - \Phi_{12}^2 = 0.$$

La forma $\Phi_{12} = 0$ rappresenta il luogo dei punti pei quali passano due coppie di tangenti ad f e f' formanti un sistema armonico, e dualisticamente, $F_{12} = 0$ è l' inviluppo delle rette che segano le due coniche in quattro punti armonici.

Se $A_{122} = 0$ esiste un numero semplicemente infinito di triangoli polari (autoconiugati) rispetto ad f, e che sieno circoscritti alla conica f' e iscritti in f.

Proprietà analoga per $A_{112} = 0$.

La equazione $N = 0$ *considerata nelle coordinate* u *rappresenta il punto d'intersezione delle polari del punto* (x) *rispetto alle due coniche.*

La equazione $B_1 = 0$, *considerata nelle coordinate* x, *è quella di una retta luogo di punti le cui polari rispetto alla conica* f' *sono coniugate armoniche della retta* u *rispetto alla conica* f.

L'equazione $D = 0$ *rappresenta i tre lati del triangolo polare comune a* f *e* f', *e* $\Delta = 0$ *rappresenta i tre vertici dello stesso triangolo.*

Tutte le coniche covarianti di f *e* f' (*per es.* $\Phi_{12} = 0$) *hanno un medesimo triangolo polare comune* $D = 0$, *o* $\Delta = 0$.

Se gli invarianti A_{112} *e* A_{122} *sono contemporaneamente zero, il rapporto anarmonico dei quattro punti d'intersezione delle due coniche è equianarmonico su ciascuna di esse.*

La condizione perchè le due coniche abbiano un contatto semplice è

$$4\,(A_{111}\,A_{122} - A_{112}^2)\,(A_{112}\,A_{222} - A_{122}^2) - (A_{111}\,A_{222} - A_{112}\,A_{122})^2 = 0.$$

Le condizioni perchè le due coniche abbiano in un punto un contatto di 2.° ordine (tre punti d'intersezione riuniti) sono:

$$\frac{A_{111}}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A_{222}}.$$

Il sistema di due coniche ha due invarianti assoluti.

Per questi possono scegliersi, come più semplici, i seguenti:

$$A_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111}\, A_{122}}$$

$$A_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112}\, A_{222}}.$$

È importante il teorema:

Il rapporto anarmonico α *delle linee che congiungono un punto di* f *ai quattro punti d'intersezione di* f *e* f' *è dato dalla formola*

$$\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2\,(2-\alpha)^2\,(1-2\,\alpha)^2} = \frac{(A_1-1)^3\, A_1\, A_2^2}{(3\, A_1\, A_2 - 2\, A_1^2\, A_2 - 1)^2},$$

e da formola simile è dato il rapporto anarmonico dei quattro raggi che congiungono un punto di f' *coi quattro punti d'intersezione.*

Per il sistema di due coniche, oltre i citati lavori di GORDAN, vedi anche PERRIN (*Soc. math. de France*, XVIII), ROSANES (*Math. Ann.*, VI), GERBALDI (*Annali di mat.*, XVII).

Per il sistema di tre coniche si vegga un lavoro di CIAMBERLINI (*Giorn. di Batt.*, XXIV); *il sistema contiene 127 formazioni; gli invarianti sono undici.* Si veggano poi i lavori di GUNDELFINGER (*Crelle*, LXXX), di MERTENS (*Sitz. ber. Akad. Wien*, XCIII), GERBALDI (*Accad. Torino*, XXV, 1890), FISCHER und MUMELTER (*Monatshefte f. Math.*, VIII, 1897).

CAPITOLO V.

Le quadriche.

§ 1. - Generazione proiettiva delle quadriche. Polarità.

Immaginiamo due stelle a sostegni distinti S, S' e *correlative* (v. Cap. I, § 3); ad ogni raggio dell'una corrisponde un piano dell'altra e viceversa e se il primo raggio si muove in un piano, il piano corrispondente gira intorno ad una retta. I punti d'incontro dei raggi di ciascuna stella coi piani corrispondenti dell'altra formano *un medesimo luogo* che è una superficie detta *quadrica.*

Sieno dati due sistemi piani correlativi, non sovrapposti. I piani che congiungono i punti dell'uno colle rette corrispondenti dell'altro, *inviluppano una stessa superficie* che è anche una *quadrica.*

Questa generazione proiettiva delle quadriche si trova in Seydewitz (*Grunert's Arch.*, IX, 1847) e Steiner (*Opere*, I, pag. 325). Per essa si può vedere anche Salmon-Fiedler (*Anal. Geom. d. Raum.*, I, pag. 333).

Un'altra definizione delle quadriche è la seguente:

Una quadrica è il luogo dei punti uniti di una dualità spaziale involutoria cioè di una polarità spaziale.

O anche:

Una quadrica è l'inviluppo dei piani uniti di una polarità spaziale.

Due punti qualsivogliano della quadrica sono centri di due stelle reciproche, mediante cui si può generare la quadrica stessa, e due piani tangenti qualisivogliano della quadrica sono sostegni di due sistemi piani reciproci atti a generare la quadrica stessa.

Una retta arbitraria dello spazio, se non è tutta situata sulla quadrica, incontra questa al più in due punti; e per una retta dello spazio, non situata sulla superficie, passano al più due piani tangenti della superficie. Perciò si dice che la quadrica è di 2.º ordine e 2.ª classe.

Se per un punto della quadrica passano due rette di essa, distinte o coincidenti, o nessuna, lo stesso avviene per ogni altro punto della quadrica.

Se in un piano tangente della quadrica vi sono due rette, o una retta o nessuna, appartenenti alla superficie stessa, lo stesso avviene per ogni altro piano tangente.

Ogni piano taglia la quadrica secondo una conica. Un piano che la tocca la taglierà secondo due rette reali, distinte, coincidenti o immaginarie.

Secondochè per ciascun punto della quadrica passauo *due* rette reali appartenenti alla quadrica stessa, ovvero una sola retta reale ovvero due rette immaginarie, la quadrica sarà una *quadrica rigata o gobba (o a punti iperbolici)*, un *cono qua-*

drico, (o anche detta *quadrica a punti parabolici)* ovvero una *quadrica a punti ellittici.*

Se la quadrica rigata è tagliata dal punto all'infinito nel sistema di due rette (toccata dal piano all'infinito) si ha il *Paraboloide iperbolico;* se è tagliata secondo una conica propria, si ha l'*Iperboloide ad una falda.*

Le quadriche rigate contengono due sistemi di rette reali; le rette di un sistema sono segate da quelle dell'altro in punteggiate proiettive. Di qui deriva la generazione di quelle quadriche mediante due punteggiate proiettive non situate nello stesso piano.

Il paraboloide iperbolico è il luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti in due punteggiate simili, non situate nello stesso piano.

Il paraboloide iperbolico è IN DUE MODI DIVERSI *il luogo di una retta che si muove appoggiandosi a due rette fisse, che non sono in uno stesso piano, e mantenendosi parallela ad un piano fisso,* che si chiama *piano direttore.*

Vi sono due piani direttori.

L'iperboloide a una falda è il luogo di una retta che si muove appoggiandosi a tre rette fisse che non si incontrano e che non sono parallele ad uno stesso piano.

Similmente le quadriche a punti ellittici si distinguono secondo il modo con cui sono tagliate dal piano all'infinito dello spazio: possono essere tagliate dal piano all'infinito in una conica reale e allora si ha l'*Iperboloide a due falde;* possono essere tagliate secondo una conica immaginaria e

si ha l'*Ellissoide;* e possono finalmente essere *toccate* dal piano all'infinito, cioè essere segate secondo una conica degenerata in due rette, e si ha allora il *Paraboloide ellittico.*

Le rette di un cono quadrico si dicono *generatrici; esse passano tutte per un punto chiamato vertice.* Meno che per questo punto, per il quale passano dunque infinite rette della superficie, per tutti gli altri punti di questa passa sempre una *sola* retta della superficie stessa. Se il vertice è all'infinito si ha il *cilindro;* la sezione di un cilindro con un piano perpendicolare alle generatrici si dice *base del cilindro.*

I piani tangenti ad una quadrica condotti per un punto P, sono i piani tangenti di un cono quadrico avente il vertice in P, e le cui generatrici sono le rette che congiungono P coi punti di contatto dei piani tangenti; questo cono si dice *cono tangente alla quadrica, ed esso tocca la quadrica secondo una curva piana che è quindi una conica.* Il piano di questa conica si dice *piano polare* di P, e P si dice a sua volta *polo* di quel piano.

La corrispondenza fra poli e polari rispetto ad una quadrica è una dualità involutoria (v. Capitolo I, § 4).

Il piano polare contiene le rette polari di P rispetto a tutte le coniche in cui i piani condotti per P segano la quadrica.

Ogni retta condotta per P sega la quadrica in Q, Q' e il piano polare in P', in modo che il gruppo $P\,P'\,Q\,Q'$ è armonico.

Se P si muove su di una retta, il piano polare

rota intorno ad un' altra retta, e se P si muove in un piano, il piano polare rota intorno un punto che è il polo di quel piano.

Due rette si dicono *polari reciproche* se i piani polari di tutti i punti di una di esse, passano per l'altra.

Se due rette polari reciproche si tagliano, il loro punto comune apparterrà alla superficie, e il loro piano sarà piano tangente alla superficie.

Le coppie di rette polari reciproche giacenti in un piano tangente, sono rette coniugate in una involuzione di cui le rette doppie sono le rette lungo le quali il piano tangente taglia la superficie.

Se due rette si tagliano, anche le loro polari reciproche si tagliano.

Due punti si dicono *coniugati* se uno di essi sta nel piano polare dell'altro.

Un punto e una retta si dicono *coniugati* se questa sta nel piano polare del punto.

Un piano e una retta si dicono *coniugati* se questa passa pel polo del piano.

Due rette si dicono *coniugate* se una di esse sta nel piano polare di un punto dell'altra.

Due piani si dicono *coniugati* se uno di essi passa pel polo dell'altro.

Triangolo coniugato rispetto alla quadrica è un triangolo in cui ogni vertice ha per coniugati gli altri due, e quindi per retta coniugata il lato opposto.

Tetraedro coniugato (o anche *autoconiugato*, *autoreciproco*) rispetto alla quadrica è un tetraedro in cui ogni vertice ha per coniugato gli altri tre, e quindi ha per piano polare la faccia opposta.

Ogni triangolo del tetraedro coniugato è un triangolo coniugato.

Due spigoli opposti del tetraedro coniugato sono polari reciproci rispetto alla quadrica.

Se due rette sono coniugate, la polare reciproca dell'una sega l'altra, e viceversa.

Se una retta è coniugata a due che si tagliano, è coniugata al loro piano e al loro punto comune.

Il polo del piano all'infinito si dice *centro* della quadrica; ogni retta passante pel centro si dice *diametro*, e ogni piano passante pel centro si dice *piano diametrale.*

Il centro è a distanza finita se il piano all'infinito non tocca la quadrica, quindi nell'iperboloide ad una falda, nell'iperboloide a due falde, nell'ellissoide, e nel cono quadrico; perciò queste superficie si dicono *quadriche a centro.*

Il paraboloide iperbolico e l'ellittico sono quadriche senza centro a distanza finita.

Un piano diametrale sega la quadrica in una conica il cui centro coincide con quello della quadrica stessa.

I diametri si dividono per metà nel centro.

Se tre corde si bisecano in un punto e non sono nello stesso piano, quel punto è il centro della superficie.

Un piano diametrale è il luogo dei punti medii di tutte le corde (parallele) coniugate ad esso.

I punti di contatto dei piani tangenti condotti dal centro alla quadrica sono all'infinito (reali o immaginari); il cono tangente che ha per vertice il centro si chiama perciò *cono assintotico.*

Esistono tre diametri, a due a due perpendicolari, tali che il piano di due di essi ha per rette coniugate le corde parallele al terzo (e quindi ad esso perpendicolare); tali diametri si dicono *principali*, e i loro piani si dicono *piani principali*.

I piani principali sono di simmetria per la quadrica.

Nell'ellissoide ogni piano diametrale taglia la superficie secondo un'ellisse; nell'iperboloide a una falda due piani principali tagliano la superficie secondo due iperboli aventi in comune l'asse immaginario, e il terzo piano principale la taglia secondo un'ellisse; nell'iperboloide a due falde due piani principali tagliano la superficie secondo due iperboli aventi in comune l'asse reale, e il terzo piano la taglia secondo un'ellisse immaginaria.

In un paraboloide si dice DIAMETRO ogni retta che passa per il punto di contatto della superficie col piano all'infinito.

Tutti i diametri di un paraboloide sono fra loro paralleli.

Fra tutti i diametri, in un paraboloide, ve n'è uno tale che il piano tangente nel punto in cui esso incontra la superficie è ad esso perpendicolare; questo diametro si chiama ASSE, e il punto in cui esso incontra la superficie si dice VERTICE.

Le sezioni del paraboloide (ellittico o iperbolico) fatte con piani paralleli all'asse, sono parabole.

Le sezioni del paraboloide fatte con piani perpendicolari all'asse, sono iperboli per il paraboloide iperbolico (o gobbo o rigato), e ellissi per il paraboloide ellittico.

La *sfera* è un ellissoide in cui ogni piano diametrale è perpendicolare al diametro che va al suo polo.

Inoltre le sfere dello spazio hanno in comune un circolo immaginario all'infinito. Questo circolo si dice *assoluto o limite dello spazio. Esso contiene tutti i punti ciclici di ogni piano dello spazio* (v. cap. IV, § 3).

Chasles e P. Serret fecero tentativi per estendere alle quadriche i teoremi di Pascal e Brianchon; per ciò si può vedere Salmon-Fiedler (*Anal. Geom. des Raum.*, I, art. 144), Klein (*Math. Ann.*, XXII, pag. 246, (1883)).

§ 2. Principali formole di geometria analitica delle quadriche.

La *quadrica* è il luogo di punti rappresentato da un'equazione razionale intera di 2.° grado fra le tre coordinate cartesiane di un punto dello spazio. Una siffatta equazione generale contiene 10 coefficienti, cioè i tre coefficienti dei quadrati delle tre coordinate, i tre coefficienti dei termini nel prodotto delle tre coordinate a due a due, i tre coefficienti dei termini di 1.° grado, e il termine indipendente dalle coordinate. Il luogo dipenderà solo dai nove rapporti di nove di tali coefficienti all'ultimo; perciò si dice che il luogo di 2.° grado è determinato da soli *nove* coefficienti, non omogenei.

L'equazione della quadrica la porremo sotto la forma (chiamando $x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4$ le coordinate *omogenee* di un punto dello spazio).

$$f(x) = \sum_{i,j}^{1\ldots4} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

dove il sommatorio si intende esteso a tutte le possibili combinazioni $i, j = 1, 2, 3, 4$ colla condizione $a_{ij} = a_{ji}$. Ponendo $x_4 = 1$ si passa all'equazione della quadrica *in coordinate non omogenee.*

Se il tetraedro fondamentale delle coordinate è un tetraedro autoconiugato, l'equazione della quadrica si riduce alla forma canonica

$$\sum_{1}^{4} a_i x_i{}^2 = 0.$$

Chiamiamo A il determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \textit{(Discriminante)}$$

e A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} in A.

Chiamando u_1, u_2, u_3, u_4 le coordinate omogenee di un piano, cioè, posto l'equazione del piano sotto la forma

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

l'equazione della medesima quadrica, in coordinate di piani, è

$$F(u_1 \, u_2 \, u_3 \, u_4) = \sum_{i,j}^{1\ldots4} A_{ij} u_i u_j = 0 \qquad (A_{ij} = A_{ji}).$$

Questa equazione rappresenta dunque la quadrica, non più come luogo di punti, ma come inviluppo di piani tangenti. Essa può anche considerarsi come equazione di condizione cui devono soddisfare i coefficienti dell'equazione di un piano perchè questo sia tangente alla quadrica data dalla primitiva equazione.

Una quadrica è determinata se sono dati 9 punti per cui deve passare, o nove piani che deve toccare.

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilite le proprietà geometriche delle varie specie di quadriche; vediamo ora come dall'equazione generale (che si suppone a coefficienti reali) si possano distinguere fra loro le varie quadriche.

Poniamo

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

e chiamiamo B_{ij} i complementi algebrici degli elementi a_{ij} nel determinante B.

Se B non è zero si hanno le quadriche a centro; se $B = 0$ si hanno i paraboloidi.

Se A è eguale a zero, e solo allora, si hanno i coni. Se contemporaneamente $A = 0$, $B = 0$ si hanno i cilindri.

Indichiamo con (12) (13)... gli angoli degli assi coordinati $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, ..., poniamo

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cos(13) \\ \cos(12) & 1 & \cos(23) \\ \cos(13) & \cos(23) & 1 \end{vmatrix}$$

(quantità positiva compresa fra 0 e 1) e indichiamo con $\Omega_{11}\, \Omega_{12} \ldots$ i complementi algebrici degli elementi di Ω.

Poniamo inoltre

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2\, B_{12} \cos(12) + \\ + 2\, B_{13} \cos(13) + 2\, B_{23} \cos(23)$$

$$D = a_{11}\, \Omega_{11} + a_{22}\, \Omega_{22} + a_{33}\, \Omega_{33} + 2\, a_{12}\, \Omega_{12} + \\ + 2\, a_{13}\, \Omega_{13} + 2\, a_{23}\, \Omega_{23}.$$

Abbiamo allora i seguenti risultati:

I rapporti $\frac{A}{\Omega}, \frac{B}{\Omega}, \frac{C}{\Omega}, \frac{D}{\Omega}$ *non si alterano per trasformazione di coordinate cartesiane (sono invarianti).*

Il segno delle quantità A, B, C, D è indipendente dal sistema di coordinate cartesiane che si sceglie.

Per il caso di assi ortogonali le quantità C, D diventano rispettivamente

$$B_{11} + B_{22} + B_{33}$$
$$a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

e Ω diventa 1 e perciò:

Le quantità $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $B_{11} + B_{12} + B_{33}$ *restano inalterate in valore passando da coordinate ortogonali ad altre coordinate anche ortogonali.*

L'equazione

$$\Delta(\rho) = \Omega\, \rho^3 + D\, \rho^2 + C\, \rho + B = 0$$

ha tutte le radici reali, e in generale distinte.

La equazione precedente può scriversi anche:

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12}+\rho\cos(12) & a_{13}+\rho\cos(13) \\ a_{21}+\rho\cos(12) & a_{22}+\rho & a_{23}+\rho\cos(23) \\ a_{31}+\rho\cos(13) & a_{32}+\rho\cos(23) & a_{33}+\rho \end{vmatrix} = 0.$$

La classificazione delle quadriche dipende dallo studio dei segni delle quantità A, B, C, D.

I) B è diverso da zero. Si hanno le quadriche a centro, cioè:

1. *Ellissoide reale, se* $C>0,\ BD>0,\ A<0$
2. *Ellissoide immaginario, se* $C>0,\ BD>0,\ A>0$
3. *Cono immaginario, se* $C>0,\ BD>0,\ A=0$
4. *Cono reale, se* $\left.\begin{matrix} C\gtreqless 0,\ BD<0 \\ C<0,\ BD\geqq 0 \end{matrix}\right\}\ A=0$
5. *Iperboloide a una falda, se* $\left.\begin{matrix} C\gtreqless 0,\ BD<0 \\ C<0,\ BD\geqq 0 \end{matrix}\right\}\ A>0$
6. *Iperboloide a due falde, se* $\left.\begin{matrix} C\gtreqless 0,\ BD<0 \\ C<0,\ BD\geqq 0 \end{matrix}\right\}\ A<0.$

II) B è eguale a zero. Si hanno i paraboloidi o i cilindri o le coppie di piani, cioè:

7. *Paraboloide ellittico, se* $C>0,\ D\gtrless 0,\ A<0$

8. *Paraboloide iperbolico*, se $C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A > 0$

9. *Cilindro a base ellittica*, se $C > 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0$

10. *Cilindro a base iperbolica*, se $C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0$

11. *Cilindro a base parabolica*, se $C = 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0$

12. *Due piani immaginari con una retta reale a distanza finita*, se $C > 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0$

$(i = 1,\ 2,\ 3)$

13. *Due piani reali che si incontrano in una retta a distanza finita*, se $C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0$

14. *Due piani paralleli, reali distinti, immaginari, o coincidenti*, se $C = 0;\ D \gtrless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0.$

Con trasformazioni di coordinate cartesiane, le equazioni delle varie specie di quadriche, possono ridursi alle seguenti forme ridotte (in coordinate

non omogenee):

1. *Ellissoide reale:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2. *Ellissoide immaginario:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

3. *Cono immaginario:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

4. *Cono reale:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

5. *Iperboloide ad una falda:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

6. *Iperboloide a due falde:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

7. *Paraboloide ellittico:* $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-x=0$

8. *Paraboloide iperbolico:* $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-x=0$

9. *Cilindro ellittico:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

10. *Cilindro iperbolico:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

11. *Cilindro parabolico:* $y^2 \pm 2\,p\,x=0$

12. *Due piani immaginari:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

13. *Due piani reali:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

14. *Due piani paralleli:* $\frac{x^2}{a^2} \mp 1 = 0.$

Nell'equazione di ogni paraboloide i termini a secondo grado in $x_1\, x_2\, x_3$ o $x\, y\, z$ formano il prodotto di due fattori lineari, e questa proprietà è caratteristica per il paraboloide.

Nell'equazione del cilindro parabolico i termini a secondo grado in $x_1\, x_2\, x_3$ o $x\, y\, z$ formano un quadrato perfetto.

Indicando con $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ le coordinate di due punti dello spazio, *la condizione perchè la retta che li congiunge, sia tangente alla quadrica $f = 0$, è*

$$f(x)\, f(y) - f^2 \binom{x}{y} = 0,$$

ponendo

$$f\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} y_4\right)$$
$$= a_{11}\, x_1\, y_1 + \ldots + a_{12}\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1) + \ldots$$

Se si immagina che y sia un punto fisso, e le x sieno coordinate correnti, questa equazione rappresenta il cono circoscritto alla quadrica e avente per vertice il punto y.

Se $F(u) = 0$ è l'equazione della quadrica in coordinate di piani, la condizione perchè la retta intersezione dei piani $(u_1\, u_2\, u_3\, u_4)$ $(v_1\, v_2\, v_3\, v_4)$ sia

tangente alla quadrica è similmente

$$F(u)\,F(v) - F^2\binom{u}{v} = 0.$$

Questa condizione equivale alla seguente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & v_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mutando in questa formola le a in A, e le u, v, in x, y si ha un' altra forma della condizione perchè la retta (x) (y) tocchi la quadrica.

Il piano polare di un punto (y) ha per equazione

$$f\binom{x}{y} = 0,$$

e le coordinate del polo di un piano

$$u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + \ldots = 0$$

sono:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv A_{11}\,u_1 + A_{12}\,u_2 + A_{13}\,u_3 + A_{14}\,u_4 \\ x_2 &\equiv A_{21}\,u_1 + A_{22}\,u_2 + A_{23}\,u_3 + A_{24}\,u_4 \\ x_3 &\equiv A_{31}\,u_1 + A_{32}\,u_2 + A_{33}\,u_3 + A_{34}\,u_4 \\ x_4 &\equiv A_{41}\,u_1 + A_{42}\,u_2 + A_{43}\,u_3 + A_{44}\,u_4. \end{aligned}$$

Se il punto (y) *appartiene alla quadrica, la equazione*

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

rappresenta il piano tangente.

La condizione perchè due punti $(x)\,(y)$ *sieno coniugati è naturalmente anche* $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$, *e la condizione perchè due piani* $(u)\,(v)$ *sieno coniugati è* $F\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$.

Queste due condizioni possono anche esprimersi sotto le forme:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{14} & x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41} & \ldots & A_{44} & x_4 \\ y_1 & \ldots & y_4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

e

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{41} & \ldots & a_{44} & u_4 \\ v_1 & \ldots & v_4 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Le condizioni perchè due rette $(u\,v)\,(u'\,v')$ *sieno coniugate sono quattro, cioè*

$$F\begin{pmatrix}u\\v'\end{pmatrix}=0,\quad F\begin{pmatrix}u\\v'\end{pmatrix}=0,\quad F\begin{pmatrix}u'\\v\end{pmatrix}=0,\quad F\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}=0$$

L'equazione complessiva dei due piani tangenti condotti da una retta $(u\, v)$ *alla quadrica, è*

$$F(u)\,(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots)^2 -$$
$$- 2 F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (v_1 x_1 + \dots)\,(u_1 x_1 + \dots) + F(v)\,(u_1 x_1 + \dots)^2 = 0.$$

Mutando F *in* f *e scambiando* x *con* u, *e* y *con* v, *si ha, correlativamente, l'equazione (in coord. di piani) dei due punti d'incontro della retta* $(x\, y)$ *colla quadrica.*

Le coordinate di questi medesimi punti d'incontro della retta $(x\, y)$ *colla quadrica sono della forma*

$$\frac{m\, x_i + n\, y_i}{m + n}$$

dove $\frac{m}{n}$ *ha per valore ciascuna delle due radici dell'equazione*

$$f(x) \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{m}{n} + f(y) = 0.$$

L'equazione di un piano diametrale qualunque è della forma

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

dove $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ *sono tre costanti arbitrarie. La retta che va al punto all'infinito di coordinate* $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, 0)$ *corrisponde alla direzione coniugata al soprascritto piano diametrale.*

I piani diametrali coniugati alle direzioni di ciascuno dei tre assi coordinati x_1, x_2, x_3 *sono dati dalle equazioni*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Le coordinate del centro della quadrica sono

$$\frac{A_{14}}{B}, \quad \frac{A_{24}}{B}, \quad \frac{A_{34}}{B}.$$

L'equazione del cono assintotico è

$$f(x) - \frac{A}{B} x_4^2 = 0$$

che si ricava da $f(x) = 0$ *mutando solo* a_{44} *in* $a_{44} - \frac{A}{B}$.

I *piani principali* sono quelli diametrali e perpendicolari alla direzione ad essi coniugata; le rette secondo cui si intersecano sono i *diametri principali o assi.*

Per ottenere i tre piani principali basta porre per $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, *nell'equazione:*

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

valori proporzionali alle radici quadrate dei tre minori principali nel determinante $\Delta(\rho)$ *(v. sopra) quando per* ρ *si ponga ciascuna delle tre radici (reali) dell'equazione* $\Delta(\rho) = 0$.

Le formole riescono naturalmente molto più semplici nel caso in cui gli assi coordinati sieno ortogonali.

Una *quadrica di rotazione o rotonda* è quella, un asse della quale è tale che tutti i piani per esso passante sono principali. La *sfera* è una quadrica in cui ogni piano diametrale è principale.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una quadrica sia rotonda è che $\Delta(\rho) = 0$ *abbia due radici eguali.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè una quadrica sia sfera è che $\Delta(\rho) = 0$ *abbia una radice tripla.*

In coordinate ortogonali le condizioni per la quadrica rotonda sono espresse da due delle relazioni

$$\frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}} = \frac{B_{22} - B_{33}}{a_{22} - a_{33}} = \frac{B_{33} - B_{11}}{a_{33} - a_{11}} = \frac{B_{11} - B_{22}}{a_{11} - a_{22}}.$$

In coordinate ortogonali le condizioni per la sfera sono

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

In un paraboloide vi sono solo DUE *piani principali a distanza finita, che segano la quadrica secondo due parabole.*

In coordinate ortogonali, le equazioni dell'asse del paraboloide (intersezione dei due piani prin-

cipali) sono:

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}}{\sqrt{B_{33}}}.$$

L'equazione di una quadrica a centro riferita al centro è (in coordinate $x\,y\,z$ non omogenee) del tipo:

$$a'_{11}\,x^2 + a'_{22}\,y^2 + a'_{33}\,z^2 + 2\,a'_{12}\,x\,y + 2\,a'_{13}\,x\,z + \\ + 2\,a'_{23}\,y\,z + \frac{A}{B} = 0.$$

L'equazione di una quadrica a centro riferita ad una terna di diametri coniugati è

$$a''_{11}\,x^2 + a''_{22}\,y^2 + a''_{33}\,z^2 + \frac{A}{B} = 0.$$

Se questi diametri coniugati sono i tre assi, le quantità

$$\sqrt{-\frac{A}{B\,a''_{11}}},\quad \sqrt{-\frac{A}{B\,a''_{22}}},\quad \sqrt{-\frac{A}{B\,a''_{33}}}$$

si dicono *lunghezze dei semiassi della quadrica.*

Esse si trovano ponendo per

$$-a''_{11},\ -a''_{22},\ -a''_{33}$$

le tre radici (reali) di $\Delta(\rho) = 0$ (v. sopra).

Nell'ellissoide reale tutti tre gli assi segano in punti reali la superficie, e le distanze del centro

da tali punti d'incontro sono proprio i semiassi dell'ellissoide. In un ellissoide qualunque i tre semiassi sono disuguali; in un ellissoide rotondo (di rotazione) due semiassi sono eguali; in una sfera tutti tre i semiassi sono eguali.

In un iperboloide a una falda due soli degli assi segano in punti reali la superficie, e le distanze del centro dal punto d'incontro coincidono colle lunghezze di due semiassi.

In un iperboloide a due falde uno solo degli assi sega in punti reali la superficie, e la distanza del centro da tal punto d'incontro coincide colla lunghezza di un semiasse.

Questi assi che segano gli iperboloidi in punti reali si dicono *trasversi*

Il piano

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

taglia la quadrica in un'ellisse, iperbole, o parabola secondochè la quantità

$$G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

è negativa, positiva, o zero.

Due piani paralleli segano la quadrica secondo coniche della stessa specie.

Per ciascun asse della quadrica passano due piani (reali o immaginarii) tali che essi e i loro paralleli segano la quadrica secondo circoli; que-

sti piani si dicono *piani ciclici;* essi danno le cosiddette *sezioni circolari* della quadrica.

I due piani ciclici per ciascun asse sono in posizione simmetrica rispetto a ciascun piano principale.

Dei sei sistemi di piani ciclici, due soli sono reali.

In ciascun sistema di piani ciclici vi sono sempre due piani tangenti, i cui punti di contatto si dicono *ombelichi.*

Dei dodici ombelichi quattro al più sono reali.

I dodici ombelichi si trovano allineati a tre a tre su otto rette immaginarie della quadrica.

I dodici ombelichi di una quadrica a centro stanno a quattro a quattro sui tre piani principali.

Due sezioni circolari appartenenti a ciascuno dei due sistemi di piani ciclici che corrispondono ad uno stesso asse della quadrica, stanno sempre su di una medesima sfera.

Nelle quadriche rotonde i due sistemi di piani ciclici reali si riducono al sistema dei paralleli.

La condizione analitica perchè un piano sia ciclico per una quadrica è data da due delle equazioni

$$\frac{G_{11}}{H_{11}} = \frac{G_{22}}{H_{22}} = \frac{G_{33}}{H_{33}} = \frac{G_{23}}{H_{23}} = \frac{G_{31}}{H_{31}} = \frac{G_{12}}{H_{12}}$$

dove le G_{ij} sono i complementi algebrici degli elementi nel determinante G, e H_{ij} sono gli analoghi complementi algebrici degli elementi nel deter-

minante

$$H = \begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cos(13) & u_1 \\ \cos(21) & 1 & \cos(23) & u_2 \\ \cos(31) & \cos(32) & 1 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

essendo $\cos(12)$, $\cos(13), \ldots$ *i coseni degli angoli degli assi coordinati.*

Per un ellissoide reale a tre assi disuguali

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c)$$

i piani ciclici reali sono quelli che passano per l'asse di media lunghezza (b).

Le coordinate dei quattro ombelichi reali sono

$$\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad 0, \qquad \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Nell' iperboloide ad una falda i due sistemi di piani ciclici reali sono paralleli al maggiore dei due assi trasversi, e gli ombelichi sono tutti immaginari.

Nell' iperboloide a due falde i due sistemi di piani ciclici reali sono paralleli all' asse non trasverso più lungo, e i quattro ombelichi sono reali.

Se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *è l'equazione dell'iperboloide a due falde e* $b > c$, *le coordinate dei quat-*

tro ombelichi reali sono

$$\pm a \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \qquad 0, \qquad \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Il cono ha due sistemi di piani ciclici reali, che sono gli stessi di quelli degli iperboloidi a una o due falde cui esso è assintotico.

In un paraboloide ellittico esistono due sistemi di piani ciclici reali; essi sono paralleli agli assi maggiori delle sezioni perpendicolari all'asse; due ombelichi sono reali e sono i punti

$$\frac{1}{4}(b^2 - c^2), \qquad 0, \qquad \pm \frac{1}{2} \sqrt{c^2 (b^2 - c^2)},$$

se

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0 \qquad b > c)$$

è l'equazione del paraboloide.

In un paraboloide iperbolico i due sistemi di piani ciclici reali sono quelli paralleli ai due piani direttori (v. § 1)*; i circoli degenerano in una retta al finito e in una retta all'infinito.*

Se $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0$ *è l'equazione del paraboloide, i due sistemi di piani ciclici sono quelli di piani paralleli ai due piani*

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

§ 3. — Proprietà focali delle quadriche.

Il luogo dei punti tali che i coni da essi circoscritti a una quadrica dotata di centro, sieno coni di rotazione (coni rotondi), si compone di tre coniche situate nei tre piani principali della quadrica; ciascuna conica ha gli stessi fuochi della sezione prodotta nella quadrica dal piano principale. Queste *coniche* si dicono *focali*, e i loro punti sono i *fuochi* della quadrica a centro.

Le coniche focali passano per i quattro ombelichi contenuti nel proprio piano.

Un ellissoide o iperboloide ammette, in generale, un'ellisse focale (reale) e un'iperbole focale situate nei due piani che passano per l'asse trasverso più lungo.

I due fuochi di una conica focale sono vertici di un'altra conica focale.

Le coniche focali per i coni quadrici si riducono a tre coppie di rette; due sole di queste rette sono reali.

Per ogni cono quadrico esistono due rette reali (rette focali) per ciascuna delle quali passano infinite coppie di piani coniugati ortogonali. Se il cono è rotondo, le due rette focali si confondono coll' asse di rotazione.

La conica prodotta nel cono da un piano perpendicolare ad una retta focale, ha per fuoco questo punto.

Le rette focali del cono assintotico di una quadrica a centro sono gli assintoti delle coniche focali della quadrica.

In un paraboloide il luogo dei punti tali che il cono circoscritto condotto per esso sia rotondo (di rotazione) è formato di due parabole (focali) situate nei due piani principali, aventi lo stesso asse del paraboloide, le aperture rivolte in sensi opposti e gli stessi fuochi delle due parabole prodotte nel paraboloide dai due piani principali.

Le parabole focali nel paraboloide sono situate in modo che il fuoco dell'una è vertice dell'altra.

I parametri delle due parabole focali sono eguali fra loro, ed eguali alla differenza dei parametri delle due parabole prodotte dai piani principali.

1. *Per l'ellissoide reale*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

di semiassi $a>b>c$ *le tre coniche focali sono:*

$$x=0,\quad \frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=-1 \quad \textit{(ellisse immag.)}$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1 \qquad \textit{(iperbole)}$$

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \qquad \textit{(ellisse reale).}$$

2. *Per l'ellissoide immaginario*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad (a>b>c)$$

le coniche focali sono:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad \textit{(ellisse reale)}$$

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{b^2 - c^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1 \qquad \textit{(iperbole)}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = -1 \; \textit{(ellisse immag.)}.$$

3. *Per l'iperboloide ad una falda*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b)$$

le coniche focali sono:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1 \; \textit{(ellisse immag.)}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1 \qquad \textit{(iperbole)}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1 \qquad \textit{(ellisse reale)}.$$

4. *Per l'iperboloide a due falde*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (b > c)$$

le coniche focali sono:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1 \; \textit{(ellisse immag.)}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1 \qquad \textit{(ellisse reale)}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1 \qquad \textit{(iperbole)}.$$

5. *Per il cono reale*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (a > b)$$

le due rette focali reali sono:

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

6. *Per un paraboloide (ellitt. o iperb.) di equazione*

$$p\,y^2 + q\,z^2 - x = 0, \qquad \left(p \lesseqgtr q\right)$$

(dove $p\,q$ hanno lo stesso segno per il parab. ellitt., e segni contrarii per il parab. iperb.), le due parabole focali sono:

$$y = 0, \quad z^2 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\left(x - \frac{1}{4\,p}\right)$$

$$z = 0, \quad y^2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(x - \frac{1}{4\,q}\right).$$

Gli assi di rotazione dei coni circoscritti alla quadrica dai fochi, sono le tangenti alle coniche focali.

Le tangenti alle coniche focali sono le rette per le quali passano infinite coppie di piani coniugati rispetto alla quadrica e fra loro ortogonali.

Il piano perpendicolare a una tangente di una conica focale nel punto di contatto sega la quadrica lungo una conica, che ha per fuoco questo punto e per direttrice una retta perpendicolare al piano della conica focale.

Se da un punto qualunque si conduce la retta perpendicolare al proprio piano polare rispetto alla quadrica, le intersezioni della retta e del piano con un piano principale sono polo e polare rispetto alla conica focale ivi contenuta.

Le intersezioni con un piano principale di un piano tangente alla quadrica e della normale, sono polare e polo rispetto alla conica focale.

È costante il prodotto delle distanze di un piano tangente alla quadrica da quei due punti di una conica focale, in cui le tangenti sono parallele al piano.

Dato l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c)$$

l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

dove λ *è un parametro arbitrario, rappresenta una quadrica confocale al dato ellissoide, cioè avente le stesse coniche focali.*

Potendo variare λ in infiniti modi, si ha una semplice infinità di quadriche confocali alla data.

Per ogni punto dello spazio passano tre di tali quadriche, cioè un ellissoide, un iperboloide ad una falda, e un iperboloide a due falde, le quali si segano ortogonalmente nel punto comune.

I tre valori di λ corrispondenti alle tre quadriche confocali passanti per un punto dato, possono prendersi come coordinate del punto, e si dicono *coordinate ellittiche.*

§ 4. — Proprietà metriche delle quadriche. Quadriche equilatere.

In un ellissoide è costante il prodotto del segmento di normale compreso fra l'ellissoide e un piano principale, per la distanza fra il centro e il piano tangente; e tal prodotto è eguale al quadrato del semiasse perpendicolare al piano tangente.

In un ellissoide è costante la somma dei quadrati di tre semidiametri coniugati.

È costante il volume del parallelepipedo costruito su tre semidiametri coniugati.

È costante le somma dei quadrati delle proiezioni di tre semidiametri coniugati su di una retta o piano.

In un paraboloide ellittico è costante la somma dei parametri principali di due qualunque sezioni coniugate e diametrali. Nel paraboloide iperbolico è costante invece la differenza dei medesimi.

In un paraboloide ellittico il luogo dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti, è un piano

perpendicolare all'asse e distante dal vertice della quantità

$$\frac{b^2 + c^2}{4}$$

$$se \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0$$

è al solito l'equazione del paraboloide.

Per l'ellissoide lo stesso luogo è una sfera concentrica all'ellissoide e il cui raggio è

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

se a, b, c sono i semiassi dell' ellissoide. Per una qualunque altra quadrica a centro lo stesso luogo è sempre una sfera (Monge).

In un iperboloide ad una falda se un piano perpendicolare ad una retta dell' iperboloide, sega questo secondo un' iperbole equilatera, tutti gli altri simili piani lo segheranno secondo iperboli equilatere.

Siffatto iperboloide si dice equilatero.

Se in un iperboloide a una falda, ad una retta ad esso appartenente ne corrispondono due altre perpendicolari fra loro e alla prima, anche ad esso appartenente, e dello stesso sistema, lo stesso accadrà per tutte, e l' iperboloide sarà un iperboloide equilatero.

Un iperboloide a una falda è equilatero quando è $D = 0$ (v. § 2).

Quindi se la sua equazione è, al solito,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la condizione perchè esso sia equilatero è

$$D = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Se in un cono quadrico una sezione perpendicolare alle generatrici è iperbole equilatera, lo stesso avverrà per tutte le sezioni perpendicolari alle generatrici; il cono si dice allora *equilatero.*

In un cono equilatero, ad ogni generatrice ne corrispondono altre due perpendicolari fra loro e colla prima.

Un cono è equilatero quando è $D = 0$.

Se in un iperboloide a due falde una sezione perpendicolare ad un assintoto (generatrice del cono assintotico) è iperbole equilatera, lo stesso avverrà per tutte le simili sezioni.

L'iperboloide si dice allora *equilatero.*

In ogni iperboloide a due falde equilatero, ad ogni assintoto ne corrispondono due altri fra loro perpendicolari e perpendicolari al primo.

L'iperboloide a due falde è equilatero quando è $D = 0$

In un paraboloide ellittico non può essere $D = 0$.

Un paraboloide iperbolico è *equilatero* quando sono fra loro perpendicolari i due piani direttori.

Perchè un paraboloide iperbolico sia equilatero deve essere $D = 0$.

In un paraboloide iperbolico equilatero ogni sezione perpendicolare all'asse è iperbole equilatera.

§ 5. — Fasci e reti di quadriche.

Date due quadriche $f = 0$, $f' = 0$ (in coord. di punti o di piani) il sistema di quadriche rappresentate da

$$f + \lambda f' = 0$$

si dice rispett. *fascio o schiera* di quadriche.

Tutte le superficie del fascio si intersecano in una curva storta di quart'ordine (curva base).

Tutte le superficie di un fascio di quadriche sono segate da un piano in un fascio di coniche, e da una retta in un fascio di gruppi di due punti cioè in coppie di punti coniugati in involuzione.

Per un punto dello spazio passa in generale una sola superficie del fascio; esistono due quadriche del fascio tangenti ad una retta data; esistono tre quadriche del fascio tangenti ad un piano dato.

I piani polari di un punto P rispetto a tutte le quadriche di un fascio, passano per una retta fissa p, e formano quindi un fascio di piani. La retta p si dice *coniugata* di P.

I fasci di piani polari relativi a due punti $P P'$ sono fra loro proiettivi.

Le rette reciproche di una retta rispetto a tutte le quadriche di un fascio sono le generatrici di un iperboloide, di cui l'altro sistema di generatrici è costituito dalle rette coniugate di tutti i punti della retta data.

I poli di un piano rispetto a tutte le quadriche di un fascio stanno su di una cubica storta; quindi anche:

I centri di tutte le quadriche di un fascio stanno su di una cubica storta; in un fascio esistono in generale tre paraboloidi di cui almeno uno è reale.

In un fascio di quadriche esistono in generale quattro coni.

Tutte le quadriche di un fascio hanno di comune un tetraedro polare, di cui i vertici sono quelli dei quattro coni appartenenti al fascio.

Date tre quadriche $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ le quali non appartengono ad un fascio, tutte le superficie rappresentate da

$$f+\lambda f'+\mu f''=0$$

formano ciò che si chiama una *rete di quadriche.*

Tutte le quadriche di una rete hanno otto punti comuni (punti base della rete).

Fra le quadriche di una rete ve ne sono infinite tangenti ad un piano; i punti di contatto stanno su di una curva generale di 3.° ordine.

Tutte le quadriche che passano per sette punti dello spazio, passano tutte ancora per un altro medesimo punto.

Gli otto punti base di una rete di quadriche hanno la proprietà che la cubica storta determinata da sei di essi ha per secante la congiungente gli altri due.

I piani polari di un punto P rispetto a tutte le quadriche di una rete passano per un medesimo punto (punto coniugato di P).

Il luogo del polo di un piano rispetto a tutte le quadriche di una rete è una superficie generale di 3.° ordine, su cui esistono anche i punti coniugati; rispetto alla rete, di tutti i punti del piano.

Fra le superficie della rete ve ne sono infinite che si riducono a coni; il luogo del vertice è una curva di 6.° ordine; su questa curva vi sono anche tutti gli infiniti punti i cui piani polari rispetto alle superficie della rete passano tutti per una retta.

Gli antichi geometri non aveano fatta una classificazione sistematica delle varie quadriche; la prima classificazione si deve ad Eulero (*Introductio in Anal. infin.*, 1748). La teoria delle quadriche progredì moltissimo nella prima metà di questo secolo per opera dei geometri della scuola francese, Monge, Hachette, Lacroix, Binet, Leroy, Poncelet, Chasles. Le coniche focali furono trovate da Dupin (*Corr. Éc. polyt.*, II) e studiate poi da Steiner (*Crelle*, I) e Chasles (*Aperçu hist.*, nota 31).

Dal punto di vista della geometria proiettiva furono fondamentali per la teoria delle quadriche le memorie speciali di Hesse (*Crelle*, XVIII, XX, XXVI, etc.), di Seidewitz (*Grunert's Arch.*, VII, VIII, IX, X), Sturm (*Crelle*, LXX, IC, etc.), oltre quelle di Staudt e Reye (v. *Geom. der Lage*) e di altri.

Una lista estesa di lavori sulle quadriche si trova nell'opera di Loria (*Il passato e il presente delle teorie geometriche.* Torino, 1896, pagina 91-99) a cui rimandiamo per ulteriori ragguagli bibliografici.

Trattati sulle quadriche dal punto di vista della geometria analitica sono quelli di Salmon-Fiedler, di Hesse, di Baltzer, di D'Ovidio, e il 2.° volume della *Geometria* di Clebsch-Lindemann, Leipzig, 1891, dal punto di vista sintetico ricordiamo quello assai esteso di Schröter, Leipzig, 1880.

La geometria descrittiva delle superficie di 2.° grado si trova nella *Darst. Geom.* di Fiedler. In fine del trattato del D'Ovidio si trovano poi parecchie accurate indicazioni sugli scopritori di alcuni fra i principali teoremi sulle quadriche.

Per le proprietà focali delle quadriche citiamo il recente libro di Staudt (*Die Focaleigenschaften der Fläch. 2ter Ord.* Leipzig, 1896).

Dal punto di vista della teoria delle forme quaternarie quadratiche le ricerche sono pochissime. Citeremo un lavoro di Mertens (*Wien. Bericht.*, XCVIII) in cui si dà il sistema completo di forme invariantive di una quadrica, ridotto a 20 formazioni, e si dà qualche indicazione sul sistema completo di due quadriche.

CAPITOLO VI.

Teoria generale delle curve piane algebriche.

---

§ 1. — Generalità. Punti singolari. Formole di Plücker. Discriminante.

Il luogo di punti, rappresentato analiticamente da un'equazione algebrica di grado n fra le due coordinate cartesiane, o fra le tre coordinate omogenee, di un punto del piano, è *una curva-luogo* piana o semplicemente *una curva piana di ordine n. Il luogo di primo ordine è la retta.*

La *tangente* di una curva-luogo è il limite della posizione della congiungente due suoi punti indefinitamente vicini.

Correlativamente: l'inviluppo delle rette rappresentate da un'equazione algebrica di grado n, fra le coordinate della retta del piano è *una curva-inviluppo di classe n. L' inviluppo di prima classe è il punto.*

Il *punto* di una curva inviluppo è la posizione limite dell'intersezione di due tangenti infinitamente vicine.

Le curve o inviluppi le cui equazioni non si spezzino in fattori interi, si dicono *semplici* o *indecomponibili.*

Una curva piana di ordine n è segata da qualunque retta del piano sempre in n punti (reali o immaginari).

Per ogni punto del piano passano sempre n rette (reali o immag.) tangenti ad una curva inviluppo di classe n.

Due curve di ordini n_1, n_2, hanno in generale $n_1 n_2$ punti comuni (reali o immag.); e due inviluppi di classi n_1, n_2 hanno $n_1 n_2$ tangenti comuni.

Dati ad arbitrio nel piano $\frac{n(n+3)}{2}$ punti, vi è una e una sola curva di ordine n che passa per essi e correlativamente.

Un punto di una curva si dirà r^{plo} *o multiplo di ordine r*, se per esso la curva passa r volte, e però in quel punto la curva ha r tangenti; se queste sono tutte distinte, il punto r^{plo} si dirà *ordinario. Una tangente* si dirà r^{pla} quando tocchi la curva-inviluppo r volte, e quindi ammetta r punti di contatto; se questi sono distinti si avrà la tangente r^{pla} ordinaria.

Se una curva di ordine n ha un punto n^{plo}, essa non è altro che l'assieme di n rette che partono da quel punto.

Una curva semplice di ordine n non può avere oltre un punto $n-1^{plo}$ anche un punto doppio.

Una curva semplice di ordine n non può avere più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi.

Se una curva semplice d'ordine n ha punti multipli ordinari i cui ordini sieno $r_1\, r_2 \ldots r_\nu$ sarà

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{r_i\,(r_i - 1)}{2} \leqq \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}.$$

Per tutti questi teoremi possono enunciarsi i loro correlativi.

Tutte le infinite curve di ordine n che passano per

$$\frac{1}{3}\, n\,(n+3) - 1$$

dati punti, passano anche per altri

$$\frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)$$

altri punti determinati dai primi.

Se degli n^2 punti comuni di due curve di ordine n, $n\,m\;(m < n)$ di essi stanno su di una curva di ordine m, gli altri $n\,(n-m)$ punti stanno su di una curva di ordine $n - m$.

Il massimo numero di punti che si possono prendere AD ARBITBIO *su di una curva di ordine m nell'intento di far passare per essi una curva semplice di ordine $n > m$, è*

$$n\,m - \frac{1}{2}\,(m-1)\,(m-2), \qquad \left(\begin{matrix}\textit{teor. di } \text{Jacobi},\\ \textit{Crelle, XV}\end{matrix}\right).$$

Tutte le curve d'ordine n descritte per $n\,m - h$ punti di una curva di ordine m, e per

$$n\,(n-m) - h'$$

punti di una curva di ordine $n - m$, segano la prima curva in altri h punti FISSI *e la seconda in altri h' punti* FISSI *(teor. di* PLÜCKER, *Alg. Curven*, p. 11).

Ogni curva di ordine n che passa per

$$n\,m - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

punti di un'altra curva di ordine $m < n$, la taglia ancora in altri $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ punti FISSI.

Qualunque curva d'ordine n descritta per

$$m\,m' - \frac{1}{2}(m+m'-n-1)(m+m'-n-2)$$

intersezioni di due curve, d'ordine m, m' (m, m' non maggiori di n) passa anche per tutti gli altri punti comuni a queste curve (teor. di CAYLEY, *Camb. Math. Journ.* III, 1843).

Se nei punti in cui una curva d'ordine n è segata da una retta, si conducono le tangenti alla curva, esse incontrano la curva medesima in altri $n(n-2)$ punti situati sopra una curva d'ordine $n-2$ (PONCELET).

Un teorema importante massime per la cosiddetta Geometria su di una curva algebrica (v. § 4) è il seguente di NOETHER:

Si abbiano due curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$; uno dei loro punti d' incontro P_i sia multiplo secondo q_i per φ e secondo r_i per ψ e sia $q_i \leqq r_i$; sia $f = 0$ una curva la quale passi per ciascuno dei punti d' in-

contro di φ *e* ψ *e abbia in* P_i *un punto multiplo d'ordine* $q_i + r_i - 1$; *la sua equazione potrà allora sempre esprimersi colla forma*

$$f = A\varphi + B\psi = 0$$

dove $A = 0$, $B = 0$ *rappresentano due altre curve di ordine conveniente.*

Perchè f possa rappresentarsi sotto questa forma non è però necessario che essa abbia in P_i *un punto multiplo d'ordine* $q_i + r_i - 1$, *ma è però necessario che lo abbia almeno d'ordine* q_i *(il minore dei due ordini): in quest'ultimo caso devono però sussistere fra i coefficienti dell'equazione di f, delle relazioni lineari.*

Per questo teorema vedi NOETHER (*Math. Ann.* VI, 352), HALPHEN (*Bull. de la Soc. math.* V), BACHARACH (*Math. Ann.* XXVI), VOSS (*Idem* XXVII), CAYLEY (*Id.* XXX), STICKELBERGER (*Id. Id.*), NOETHER (*Id. Id.*), ZEUTHEN (*Id.* XXXI), GUCCIA (*Compt. Rend.* 1888) e altri. Si può poi anche vedere la *Geom.* di CLEBSCH-LINDEMANN.

Un punto multiplo d'ordine k può considerarsi come la riunione di $\frac{k(k-1)}{2}$ *punti doppi, e una tangente multipla d'ordine k può considerarsi come la riunione di* $\frac{k(k-1)}{2}$ *tangenti doppie.*

Una tangente ad una curva di ordine n, ha colla curva ancora altri $n - 2$ *punti comuni, oltre quello di contatto; e da un punto di una curva di classe n, possono condursi alla curva ancora altre* $n - 2$ *tangenti, oltre quella nel punto.*

In un punto doppio le due tangenti possono essere reali e distinte, immaginarie, e coincidenti; nel secondo caso si ha il cosiddetto *punto doppio isolato*, e nel terzo caso si ha la *cuspide* o *punto di regresso* o *punto stazionario.*

La tangente nella cuspide (tangente cuspidale) conta come tre delle tangenti che dalla cuspide si possono condurre alla curva.

Correlativamente alla cuspide è da considerarsi la cosiddetta *tangente d'inflessione o stazionaria*, una tangente alla curva i cui rimanenti punti di intersezione colla curva sono $n-3$, il cui punto di contatto, cioè, è da considerarsi come la riunione di tre punti infinitamente vicini. Tal punto di contatto si chiama *flesso della curva.* La tangente di inflessione è da considerarsi come una tangente doppia i cui punti di contatto coincidono; tale considerazione però bisogna farla immaginando la curva come inviluppo di tangenti.

I punti multipli e le tangenti multiple si chiamano generalmente *punti e tangenti singolari.*

È però da notare che un punto doppio o una cuspide non è da considerarsi come *singolarità* che solo quando la curva è considerata come un luogo di punti, e non quando è considerata come inviluppo di tangenti, perchè in tale ultimo caso ogni inviluppo possiede sempre un certo numero di punti doppi. Similmente una tangente doppia o una tangente d'inflessione è da considerarsi come *singolarità* solo quando la curva è considerata come inviluppo e non come luogo.

Di una curva sia n l'ordine, ν la classe, d il numero dei punti doppi, r il numero dei punti di

regresso o cuspidi, τ il numero delle tangenti doppie e ι il numero delle tangenti di flesso.

Fra questi numeri sussistono allora quattro relazioni rimarchevoli che si chiamano le formole di Plücker *(Crelle, XII).*

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3r$$

$$n = \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota$$

$$\iota = 3n(n-2) - 6d - 8r$$

$$r = 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\iota.$$

Da queste formole, di cui una è conseguenza delle altre tre, risultano le altre relazioni:

$$3(\nu - n) = \iota - r$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Una curva-luogo generale, cioè senza punti doppi e cuspidi ha la classe, il numero delle tangenti doppie, e il numero dei flessi, determinati dalle relazioni

$$\nu = n(n-1)$$

$$\iota = 3n(n-2)$$

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9),$$

e correlativamente.

Per la presenza di d punti doppi e r cuspidi, il numero delle tangenti doppie diventa

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] +$$
$$+ 2d(d-1) + \frac{9}{2} r(r-1) + 6dr.$$

Introducendo il cosiddetto *genere* (Riemann, *Crelle*, LIV; Clebsch, *Id.*, LXIII, LXIV) *di una curva* le formole di Plücker acquistano altra forma.

Poniamo

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$
$$= \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota;$$

il numero p si chiama *genere* della curva-luogo e della curva-inviluppo. *Esso rappresenta la differenza fra il numero massimo di punti doppi e cuspidi che può avere la curva-luogo senza spezzarsi, e il numero di quelli che effettivamente ha.*

Ovvero: *la differenza fra il numero massimo di tangenti doppi e flessi che può avere la curva inviluppo e il numero di quelli che effettivamente possiede.*

Le formole di Plücker diventano allora:

$$2p \quad 2 = \nu + r - 2n$$
$$= n + \iota - 2\nu$$
$$= n(n-3) - 2(d+r)$$
$$= \nu(\nu-3) \quad 2(\tau+\iota).$$

Nelle formole di Plücker non si fa distinzione fra punti e tangenti singolari, reali o immaginarie. Esiste però una relazione fra le sole singolarità reali (v. su questo KLEIN, *Math. Ann.* X; PERRIN, *Bull. de la Soc. math.* VI).

Il genere p per una curva semplice non può essere che o zero o positivo.

Una curva di genere zero si dice *razionale* o *unicursale* (CAYLEY) e *le coordinate dei suoi punti si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro. Essa ha* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *punti doppi e cuspidi.*

Fra gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *punti doppi e cuspidi di una curva di genere zero, non vi possono essere al massimo che* $\frac{3(n-2)}{2}$ *cuspidi.*

Il concetto di genere fu introdotto da RIEMANN (cit.), e indi applicato da CLEBSCH alla geometria (cit.). Il CAYLEY adoperò invece di *genere* (detto *Geschlecht* dei tedeschi) la parola *defect* (*London math. soc.* 1865).

In quanto alla forma di una curva cioè alla figura formata da tutti i punti reali di essa ecco alcune fondamentali nozioni: Una curva può risultare di diversi rami, intendendo per ramo di una curva l'assieme di tutti quei punti reali della curva stessa, tale che si possa con continuità passare da un punto ad un altro, incluso anche il caso che si debba passare per l'infinito; così p. es. le due parti di un' iperbole formano, secondo il nostro punto di vista, un ramo solo.

Un ramo di una curva può essere pari o dispari secondochè è tagliata da una retta in un numero pari o dispari di punti reali. *Un ramo dispari può generarsi colla deformazione di una retta, e un ramo pari colla deformazione di una conica.*

Due rami dispari si incontreranno sempre, quindi:

Una curva senza punti doppi non può contenere che un solo ramo dispari, al più. Propriamente:

Una curva senza punti doppi e di ordine dispari conterrà sempre un ramo dispari, e se è di ordine pari non ne conterrà alcuno.

Queste distinzioni vengono da STAUDT (*Geom. der Lage*, Nürnberg, 1847); vedi anche KLEIN (*Math. Ann.* VI); ZEUTHEN (*Id.*, VII), etc., etc.

Una curva di genere p *non può avere più di* $p+1$ *rami, se* $(n-1)(n-2)$ *è eguale o maggiore di* p, *esistono sempre curve di ordine* n *aventi* $p+1$ *rami* (HARNACK, *Math. Ann.*, X).

Stabiliamo ora alcune formole fondamentali per la geometria analitica delle curve piane algebriche.

Supponiamo scritta l'equazione della curva in coordinate cartesiane ovvero in coordinate omogenee proiettive.

Nel primo caso supponiamo raccolti tutti i termini di grado zero, uno, due, ... nelle coordinate, e messa quindi l'equazione sotto la forma

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_n = 0$$

dove in generale u_r è una espressione intera omogenea nelle due coordinate x e y.

Nel secondo caso, chiamando $x_1\, x_2\, x_3$ le tre coordinate omogenee, possiamo porre l'equazione sotto la forma

$$f = u_0\, x_3^n + u_1\, x_3^{n-1} + \ldots + u_n = 0$$

ovvero adoperando i principi del calcolo simbolico delle forme ternarie (vedi vol. I, Cap. XII; e vol. II, Cap. III) sotto la forma simbolica

$$f = a_x{}^n = b_x{}^n = c_x{}^n = \ldots = 0.$$

Se $u_0 = 0$ allora la curva passa per l'origine delle coordinate (nel primo caso), ovvero passa per il vertice ($x_1 = 0, x_2 = 0$) del triangolo fondamentale delle coordinate (nel secondo caso).

In tal caso l'equazione $u_1 = 0$, rappresenta la tangente nel medesimo punto.

Se è $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, quel punto è un punto doppio per la curva f; le due tangenti in tal punto doppio sono date da $u_2 = 0$. Se u_2 è un quadrato perfetto, senza che la base di esso cioè $\sqrt{u_2}$ sia fattore razionale di u_3, allora quel punto è una cuspide; se invece $\sqrt{u_2}$ è fattore razionale di u_3, allora il punto non è propriamente una cuspide, ma un punto in cui la curva tocca sè stessa (Selbstberührungspunkt), il quale è da considerarsi come la riunione di due punti doppi; in tal caso la tangente ha quattro intersezioni, infinitamente vicine, colla curva, e non solo tre come nel caso della cuspide.

Se in generale $u_0 = u_1 = \ldots = u_{r-1} = 0$ *allora il punto origine è un punto* r^{plo} *della* $f = 0$, *e le* r *tangenti in esso sono determinate da* $u_r = 0$.

Per un punto doppio le tre derivate di f rispetto ad $x_1\, x_2\, x_3$ devono essere zero, cioè deve essere

$$a_x^{n-1}\, a_1 = a_x^{n-1}\, a_2 = a_x^{n-1}\, a_3 = 0.$$

Eliminando x *fra queste tre equazioin si ha un'equazione*

$$R = 0$$

dove R *è una formazione invariantiva dei coefficienti dell'equazione della curva.*

Tale invariante si chiama *discriminante della curva.*

Il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè f *abbia un punto doppio.*

Tacendo di altri lavori speciali più antichi, le prime ricerche sistematiche sulla teoria generale delle curve sono contenute nella *Introductio in anal. infin.* di Eulero (1748) e nella *Introduction à l'anal. des lignes courbes algeb.* (1750) di Cramer. Appartiene anche ad Eulero (*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des courbes.* Acc. di Berl. 1748) la spiegazione del paradosso che due curve di n^{mo} ordine si tagliano in un numero di punti maggiore di quanti ne occorrono per determinarne una.

Dopo questi, tralasciando altri lavori di Lamé, di Gergonne, etc. furono importantissimi il *System der analyt. Geom.* (1835) di Plücker, la

Theorie der alg. Curven (1839) del medesimo Autore, e altri lavori dello stesso (*Journ. de Liouville*, 1834, 1837) nei quali il PLÜCKER dette le famose formole, che prendono il nome da lui.

Sui punti singolari lavori notevoli furono quelli di PUISEAUX (*Journ. de Liouville*, 1850), di CAYLEY (*Quart. Journ.* VII, XI, *Crelle*, LXIV, etc.), di HALPHEN (*Mém. des sav. étrang.* XXVI, *Compt. Rend.* LXXVIII, LXXX), STOLZ (*Math. Ann.* VIII), etc.

Un lavoro fondamentale sulla teoria generale delle curve fu l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* di CREMONA (Bologna, 1862; tradotta anche in tedesco nel 1865) e i libri in cui sono sistematicamente raccolti, e con metodi analitici, tutti i principali risultati, sono quelli molto conosciuti di SALMON *(Sulle curve piane di grado elevato)* tradotto in varie lingue, e quello di CLEBSCH-LINDEMANN *(Lezioni di Geometria)*. Nei seguenti paragrafi daremo altre indicazioni storiche e bibliografiche, relative ai soggetti che vi si tratteranno.

§ 2. — TEORIA DELLA POLARITÀ. CURVE COVARIANTI.

Data la curva rappresentata simbolicamente con

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0 \qquad \text{(v. Cap. III)}$$

le curve rappresentate da

$$a_x^{n-1} a_y = 0$$

$$a_x^{n-2} a^2_y = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_x a_y^{n-1} = 0$$

si chiamano rispettivamente *curve polari* di 1.°, 2.°,... ordine del polo y rispetto alla curva data. I primi membri di queste equazioni si ottengono applicando su f, una, due,... volte l' operazione cosiddetta di polare, che è, a meno di un fattore numerico, nel nostro caso *(campo ternario)* rappresentata dal simbolo:

$$\Delta = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{(v. I, 282).}$$

Se dal punto y si conduce una retta che tagli la curva in n punti, questa taglierà le curve polari di 1.°, 2.°... ordine, di y, nei centri armonici di $n - 1^{mo}$, $n - 2^{mo}$ ... ordine di y rispetto al gruppo degli n punti.

Questa proprietà potrebbe servire come fondamento alla definizione delle curve polari.

Se il punto y è sulla r^{ma} polare di z, z è situato sulla $n - r^{ma}$ polare di y.

Se il polo y è situato sulla curva data, tutte le sue curve polari passeranno per esso e in esso saranno tangenti alla curva data.

La $n-1^{ma}$ polare (retta polare) di un punto, che appartiene alla curva fondamentale, è la tangente in quel punto.

Gli $n(n-1)$ punti, nei quali la prima polare di un punto (y) taglia la curva data, sono i punti di contatto delle tangenti condotte da (y) alla curva data.

Un punto r^{plo} della curva fondamentale è multiplo di grado $r-s$ per la polare s^{ma} di qualunque polo.

Se una curva si spezza in una retta e in un'altra curva di ordine $n-1$, la prima polare di un punto della retta è composta di essa retta e della prima polare rispetto alla curva di ordine $n-1$.

La polare r^{ma} di un punto O_r rispetto alla polare s^{ma} di un punto O_s coincide colla polare s^{ma} di O_s rispetto alla polare r^{ma} di O_r.

Se la curva fondamentale ha un punto doppio D, la prima polare di un qualsivoglia polo O passa per D ed ivi ha per tangente la retta coniugata armonica di DO rispetto alle due tangenti nel punto doppio. Se il punto doppio è una cuspide, la tangente alla prima polare è la stessa tangente cuspidale.

Le prime polari di tutti i punti di una retta formano un fascio di curve cogli stessi $(n-1)^2$ punti base.

La conica polare d'un punto doppio si decompone in due rette che sono le due tangenti nel punto doppio.

La conica polare d'un flesso si decompone in due rette, una delle quali è la tangente d'inflessione.

Se un punto della curva fondamentale ha per conica polare il sistema di due rette, esso è o un punto doppio o un flesso per la curva fondamentale.

Se il polo percorre una curva d'ordine m, la retta polare inviluppa una curva di classe $m(n-1)$.

Sopra ogni retta esistono $2(n-2)$ punti di cui le prime polari sono toccate dalla retta; le coniche polari dei punti di contatto sono tangenti a questa stessa retta.

Un polo che sta in linea retta con n punti di una curva di ordine n, ha la stessa retta polare rispetto alla curva, e rispetto al sistema delle n tangenti negli n punti.

La retta polare di un punto all' infinito in una determinata direzione si dice *diametro della curva di ordine n.*

Il diametro è il luogo dei centri delle medie distanze (v. Cap. II, § 2) *di tutti i sistemi di n punti tagliati sulla curva da un sistema di corde parallele.*

Considerando la curva come inviluppo di classe ν, il polo della retta all' infinito si dirà *centro.*

Il centro è l' inviluppo (punto) di una retta parallela ad un sistema di ν tangenti alla curva fra loro parallele, e passanti per il centro delle medie distanze dei ν punti che le ν tangenti determinano su di una retta ad esse perpendicolare.

Se da un punto O si conducono due rette che tagliano la curva nei punti

$$R_1\, R_2 \ldots R_n\,,\ S_1\, S_2 \ldots S_n\,;$$

il rapporto

$$\frac{O\,R_1 \ldots O\,R_n}{O\,S_1 \ldots O\,S_n}$$

è costante qualunque sia il punto O purchè la direzione delle trasversali resti costante (teor. di Newton, *Enum. lin. tertii ordinis).*

Si abbia un poligono $A\,B\,C \ldots$ i cui lati taglino una curva di n^{mo} ordine in n punti; si indichino con $(B)_1$ $(B)_2$ i prodotti dei segmenti (contati da B sino agli n punti) segnati rispett. sui lati $B\,C$, $B\,A$; con (C_1), (C_2) i prodotti analoghi, ecc.; *si avrà la relazione*

$$(A)_1\,(B)_1\,(C)_1 \ldots = (A)_2\,(B)_2\,(C)_2 \ldots$$

(teor. di Carnot, *Géom. de position*, pag. 437).

Se su ogni retta condotta per un punto O, e segante la curva in $R_1\,R_2 \ldots R_n$ si determina un punto R in modo che

$$\frac{n}{O\,R} = \frac{1}{O\,R_1} + \frac{1}{O\,R_2} + \ldots$$

ovvero

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{O\,R} - \frac{1}{O R_i} \right) = 0,$$

il luogo di R è una retta (teor. di Cotes, *Harmonia mensurarum,* 1722) *la quale è propriamente la retta polare di O.*

Similmente: *la conica polare del punto O è il luogo di un punto R che soddisfa alla relazione*

$$\sum_{ij} \left(\frac{1}{O\,R} - \frac{1}{O R_i} \right) \left(\frac{1}{O\,R} - \frac{1}{O R_j} \right) = 0, \quad \text{ecc., ecc.}$$

Per un punto O si conduca una retta che tagli la curva in n punti, e in questi si conducano le tangenti alla curva; *per O si conduca poi una qualunque altra trasversale che tagli la curva in $R_1 \ldots R_n$, e le tangenti in $r_1 \ldots r_n$; si ha allora*

$$\sum_1^n \frac{1}{OR_i} = \sum_1^n \frac{1}{O r_i} \qquad \textit{(teor. di } \text{Maclaurin}).$$

Introduciamo ora tre importanti curve covarianti, la *Hessiana*, la *Steineriana* e la *Cayleyana.*

Il luogo dei punti doppi delle prime polari dei punti del piano è la *Hessiana;* il luogo dei punti le cui prime polari hanno un punto doppio è la *Steineriana; i punti di queste due curve si corrispondono biunivocamente;* l'inviluppo delle rette che congiungono un punto della *Steineriana* col punto corrispondente della *Hessiana* è infine la *Cayleyana.*

Se $f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots = 0$ (in notaz. simbolica, v. Cap. III) è la equazione della curva data, *quella della Hessiana è*

$$(a\,b\,c)^2 a_x^{n-2}\; b_x^{n-2}\; c_x^{n-2} = 0$$

ovvero $\left(\textit{ponendo } f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

La equazione della Steineriana si ottiene poi eliminando x fra le tre equazioni

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = 0$$

$$a_x^{n-2} a_y a_2 = 0$$

$$a_x^{n-2} a_y a_3 = 0.$$

Il seguente quadro dà i valori per i numeri plückeriani (ordine, classe, ecc. ecc.) relativi alle tre curve ora introdotte.

Si suppone che la curva data sia generale, cioè non ammetta punti doppi e cuspidi, e sia di ordine n.

I. *Hessiana.*

genere $= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$

ordine $= 3(n-2)$

classe $= 3(n-2)(3n-7)$

punti doppi $= 0$

cuspidi $= 0$

tang. doppie $= \frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$

flessi $= 9(n-2)(3n-8).$

II. *Steineriana.*

genere $= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$

ordine $= 3(n-2)^2$

classe $= 3(n-1)(n-2)$

punti doppi $= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$

cuspidi $= 12(n-2)(n-3)$

tang. doppie $= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$

flessi $= 3(n-2)(4n-9)$.

III. *Cayleyana.*

genere $= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$

ordine $= 3(n-2)(5n-11)$

classe $= 3(n-1)(n-2)$

punti doppi $= \frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$

cuspidi $= 18(n-2)(2n-5)$

tang. doppie $= \frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$

flessi $= 0$.

Se la curva data ammette dei punti doppi e cuspidi, allora a questa tabella devono farsi delle modificazioni.

Per $n = 3$ le formole relative alla Cayleyana cadono in difetto; in questo caso la Hessiana e la Steineriana sono una sola e medesima curva di 3.° ordine, e la Cayleyana anzichè di 6.ª classe è solo di 3.ª classe; anzichè di 12.° ordine è solo di 6.° ordine, e anzichè 18 cuspidi ne ha solo 9.

Della Hessiana, Steineriana e Cayleyana si possono dare varie definizioni che corrispondono ad altrettante loro proprietà specifiche.

L'Hessiana di una curva è:

a) il luogo di un punto nel quale si toccano due (epperò infinite) prime polari;

b) il luogo dei punti doppi delle prime polari;

c) il luogo di un polo la cui conica polare si scinde in due rette;

d) il luogo di un polo le cui rette polari rispetto alle prime polari della curva, concorrono in un punto.

La Steineriana di una curva è:

a) il luogo dei poli delle prime polari dotate di punti doppi;

b) il luogo dei punti d'intersezione delle coppie di rette che rappresentano coniche polari;

c) l'inviluppo delle rette polari dei punti dell'Hessiana;

d) il luogo dei punti le cui prime polari toccano l'Hessiana;

e) il luogo di un punto nel quale concorrono le rette polari di uno stesso polo rispetto alle prime polari della curva fondamentale.

La Cayleyana di una curva è:

a) l'inviluppo delle rette che uniscono i punti corrispondenti della Hessiana e della Steineriana;

b) l'inviluppo delle tangenti comuni nei punti di contatto fra le prime polari.

In un punto doppio della curva fondamentale, la Hessiana ha anche un punto doppio colle stesse tangenti.

In una cuspide della curva fondamentale, la Hessiana ha un punto triplo, e due dei suoi rami toccano la tangente cuspidale; in tal punto sono da considerarsi riunite otto delle intersezioni della curva colla Hessiana.

L'Hessiana passa per i flessi della curva fondamentale.

La Steineriana e Cayleyana toccano ambedue le tangenti di flesso della curva fondamentale.

L'Hessiana in un suo punto qualunque è tangente alla seconda polare del corrispondente punto della Steineriana.

La tangente in un punto O dell'Hessiana è la coniugata armonica della retta che congiunge esso col punto corrispondente O' della Steineriana, rispetto alle due rette che toccano la prima polare di O' nel punto doppio; e la tangente in O' alla Steineriana è la coniugata armonica di $O'O$ rispetto alle due rette nelle quali degenera la conica polare di O.

La teoria delle polari trova i suoi inizi nei lavori di Cramer, Newton e altri, sui diametri rettilinei o curvilinei delle curve. È a Bobillier

che si devono concetti più generali (*Ann. de Gergonne*, XVIII, XIX, 1828). Indi se ne occuparono Plücker (*Crelle*, V), Grassmann (*Crelle*, XXIV), De Jonquieres (*Journ. de Liouville*, 1857), Cayley (*Phil. Trans.* CXLVIII). Indi il Cremona pose la teoria delle polari a fondamento di tutta la teoria delle curve, nella sua citata *Introduzione.*

La Hessiana fu introdotta da Hesse (*Crelle*, XXVIII, XLI) e così chiamata da Sylvester (*Phil. Trans.*, CXLIII); la *Steineriana* fu introdotta da Steiner (*Crelle*, XLVII) e così chiamata da Cremona *(Intr.)* mentre da Steiner era stata chiamata *curva nodo (Kerncurve)*; la *Cayleyana* fu introdotta da Cayley per le curve di 3.° ordine (*Phil. Trans.*, CXLVII, 1857) e indi studiata da Steiner (*Crelle*, XLVII). È importante il lavoro di Clebsch (*Crelle*, LXIV) sulla *Steineriana.*

Sono stati parecchi i lavori che hanno cercato di dimostrare la proposizione della mancanza di punti singolari nella Hessiana corrispondente ad una curva generale. Questa proposizione era stata ammessa come postulato dal Cremona, e per le curve di 4.° ordine fu dimostrata da Geiser (*Ann. di mat.*, IX). Altri lavori sulla Hessiana sono quelli di Del Pezzo (*Rend.* Napoli, 1883), Brill (*Math. Ann.*, XIII), Segre (*Rend. Lincei*, 1895), etc.

§ 3. — Sistemi lineari di curve piane.

Se $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \ldots$ sono le equazioni di $k+1$ curve piane di ordine n, il sistema rappresentato da

$$\lambda_1 a_x{}^n + \lambda_2 b_x{}^n + \ldots = 0$$

dove $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ sono $k+1$ parametri arbitrari, costituisce ciò che si chiama *un sistema lineare di specie k*. Per $k=1$ si ha *il fascio*, per $k=2$ si ha *la rete.*

Un sistema lineare di specie k è determinata da $k+1$ curve di ordine n, le quali non appartengano ad un medesimo sistema lineare di specie inferiore.

Se $k > 1$ le curve del sistema non avranno in generale alcun punto comune (punti base); però se tutte le $k+1$ curve che individuano il sistema, hanno un punto comune, questo punto apparterrà anche a tutte le altre curve del sistema.

Se $k=1$ vi saranno sempre n^2 punti base del fascio, cioè punti pei quali passano tutte le curve del sistema.

Un sistema lineare di curve di ordine n e di specie k determina su di una trasversale un'involuzione di punti di ordine n e specie k (v. Capitolo II, § 1).

Fra le curve di un sistema lineare ve ne sono $(k+1)(n-k)$ le quali hanno un contatto di k^{mo}

ordine con una retta data (cioè $k+1$ punti infinitamente vicini comuni).

Fra le curve di un sistema lineare ve ne sono

$$\frac{2^k (n-k)(n-k-1)\dots(n-2k+1)}{k!}$$

ciascuna delle quali tocca k volte una retta data.

Fra le curve di un fascio ve ne sono $2(n-1)$ che toccano una data retta; e ve ne sono $m(2n+m-3)$ che toccano una data curva di ordine m, senza punti doppi e cuspidi. Nel caso che questa avesse d punti doppi e r cuspidi, bisognerebbe da quel numero ancora sottrarre $2d+3r$.

Fra le curve d'una rete ve ne sono $3(n-2)$ per ciascuna delle quali una data retta è tangente di flesso.

Se si considerano i due fasci di raggi che hanno per centri due degli n^2 punti base di un fascio di curve di ordine n, e si considerano come corrispondenti i due raggi che sono le tangenti condotte nei due punti base ad una medesima curva del fascio, *i due fasci di raggi sono proiettivi;* quindi *il rapporto anarmonico delle quattro tangenti a quattro curve del fascio in un medesimo punto base, è lo stesso di quello delle quattro tangenti in un altro qualunque punto base;* questo rapporto anarmonico lo possiamo perciò chiamare *rapporto anarmonico delle quattro curve del fascio.*

Fra le curve di un fascio che si toccano tutte in un punto base P, ve n'è una per cui P è flesso, e un'altra per la quale P è punto doppio.

Fra le curve di un fascio di cui un punto base P è punto doppio per tutte le curve (a tangenti

distinte e variabili da curva a curva) ve ne sono due per cui P è cuspide; se una delle due tangenti è comune a tutte le curve, allora ve n' è una sola di queste per cui P è cuspide; e se ambedue le tangenti sono fisse, vi è una curva del fascio per cui A è punto triplo.

In un fascio esistono in generale $3(n-1)^2$ *curve a punti doppi.*

Questo teorema subisce modificazioni quando le curve del fascio hanno dei punti multipli di varia natura. Su ciò vedi Cremona (*Introduzione, ecc.* e *Annali di Mat.* VII, 1864).

Date tre curve di cui le equazioni sieno

$$a_x^n = 0$$

$$b_x^n = 0$$

$$c_x^n = 0$$

la condizione perchè appartengano allo stesso fascio è che il loro jacobiano

$$(a\,b\,c)\,a_x^{n-1}\;b_x^{n-1}\;c_x^{n-1}$$

sia identicamente zero (v. Gordan-Noether, *Math. Ann.* X).

Se da un punto O si conducono le tangenti a tutte le curve di un fascio, i punti di contatto giacciono in una curva d'ordine $2n-1$ *che passa per O e per gli* n^2 *punti base del fascio.*

I punti doppi delle curve di un fascio hanno la medesima retta polare rispetto a tutte le curve del fascio stesso.

Il luogo di un punto in cui si tocchino due (e quindi infinite) curve di una rete è una curva di ordine $3(n-1)$ *che si chiama* HESSIANA *della rete o anche* JACOBIANA *della rete. Colle solite notazioni del calcolo simbolico, la sua equazione è*

$$(a\,b\,c)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,c_x^{n-1}=0.$$

Essa è un combinante del sistema delle tre curve fondamentali della rete; cioè il primo membro della sua equazione si moltiplica solo per un fattore costante se ad una delle tre curve si sostituisce una combinazione lineare di esse.

L'Hessiana di una rete è il luogo dei punti doppi delle curve della rete; ovvero, è il luogo dei punti le cui rette polari rispetto alle curve della rete concorrono in un punto.

Il luogo dei punti in cui concorrono le rette polari, rispetto alle curve della rete, di tutti i punti dell'Hessiana è la curva detta *Steineriana;* e l'inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti dell'Hessiana e della Steineriana è una curva detta *Cayleyana.*

La Steineriana è di ordine $3(n-1)^2$, *e la Cayleyana è di classe* $3n(n-1)$.

Considerando la rete delle prime polari rispetto ad una curva data, la Hessiana, la Steineriana e la Cayleyana della rete, diventano le omonime curve relative alla curva fondamentale data (vedi § 2).

La Hessiana o Jacobiana della rete è una curva

d'ordine:	$3(n-1)$
di classe:	$3(n-1)(3n-4)$
di genere:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$
con punti doppi:	0
con cuspidi:	0
con tang. doppie:	$\frac{27}{2}n(n-1)(n-2)(3n-5)$
con flessi:	$9(n-1)(3n-5)$.

La Steineriana della rete è una curva

d'ordine:	$3(n-1)^2$
di classe:	$3n(n-1)$
di genere:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$
con punti doppi:	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$
con cuspidi:	$12(n-1)(n-2)$
con tang. doppie:	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$
con flessi:	$3(n-1)(4n-5)$.

La Cayleyana della rete è una curva

d'ordine:	$3(n-1)(5n-6)$
di classe:	$3n(n-1)$

di genere: $\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$

con punti doppi: $\frac{9}{2}(n-1)(5n-8)(5n^2-9n+2)$

con cuspidi: $18(n-1)(2n-3)$

con tang. doppie: $\frac{9}{2}(n-1)(n^2-2)$

con flessi: 0.

Allorchè tutte le curve di una rete hanno un punto comune, una di esse ha ivi un punto doppio; e quelle che in quel punto toccano una data retta, formano un fascio. La Hessiana passa per lo stesso punto ed ha ivi anche un punto doppio colle tangenti coincidenti con quelle della curva che ha ivi il punto doppio.

Se poi tutte le curve della rete hanno un punto comune, e ivi la stessa tangente, ve n'è un fascio di curve aventi ivi un punto doppio, e due aventi ivi una cuspide. La Hessiana ha ivi un punto triplo; due delle tangenti nel punto triplo coincidono colla tangente comune.

Se tutte le curve di una rete hanno in un punto fisso un punto multiplo d'ordine r, la Hessiana ha ivi un punto multiplo d'ordine $3(r-1)$.

Ad ogni curva della rete dotata di due punti doppi corrisponde un punto doppio nella Steineriana, quindi nella rete generale vi sono

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

curve con due punti doppi.

Similmente nella rete generale vi sono

$$12\,(n-1)\,(n-2)$$

curve dotate di una cuspide;

$$\frac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,(3\,n^2+3\,n-8)$$

fasci di curve che hanno fra loro due contatti;

$$3\,(n-1)\,(4\,n-5)$$

fasci di curve che hanno fra loro un contatto di 2.° ordine (contatto d'osculazione) cioè che hanno di comune tre punti infinitamente vicini.

Tutti i numeri precedenti subiscono modificazioni quando la rete ha dei punti-base, semplici o multipli, cioè dei punti pei quali passino tutte le curve della rete.

Una rete di cui tutte le curve si incontrino a due a due *in un solo punto mobile* si dice *rete omaloidica.*

Tutte le curve di una rete omaloidica sono di genere zero.

Se $\rho_1\,\rho_2\ldots\rho_s$ *sono le molteplicità, per ciascuna curva di una rete omaloidica, dei punti-base, si hanno le relazioni:*

$$\sum_1^s \rho^2_i = n^2 - 1$$

$$\sum_1^s \frac{\rho_i\,(\rho_i - 1)}{2} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

$$\sum_1^s \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2$$

$$\sum_1^s \rho_i = 3(n-1).$$

Date tre curve degli ordini $n_1\, n_2\, n_3$ si possono costruire delle curve covarianti relative al sistema delle tre curve, e che sono analoghe alla Jacobiana e alla Steineriana di una rete (quando $n_1 = n_2 = n_3 = n$).

La *Jacobiana del sistema di tre curve* è una curva (di ordine $n_1 + n_2 + n_3 - 3$) luogo dei punti le cui rette polari rispetto alle tre curve concorrono in uno stesso punto. Il luogo di quest'ultimo punto è una curva che, pel caso degli ordini eguali, diventa *la Steineriana* della rete, *e che è di ordine*

$$n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 - 2(n_1 + n_2 + n_3) + 3.$$

La Jacobiana delle tre curve è anche il luogo dei punti in cui si segano le prime polari di uno stesso punto, relative alle tre curve.

Se le tre curve hanno punti comuni a tutte tre, la Jacobiana e la Steineriana passano per essi.

La Jacobiana passa anche pei punti doppi delle curve date.

La teoria dei sistemi lineari di curve è stata studiata in varie direzioni negli ultimi tempi, inquantochè questa teoria si rannoda a varie altre teorie geometriche quali la trasformazione biuni-

voca, la rappresentazione piana delle superficie, e anche la cosiddetta geometria dei gruppi di punti su di una curva algebrica.

Due fasci di curve poi possono considerarsi fra loro *in corrispondenza proiettiva*, e allora si ricava l'importante teorema che *ogni curva algebrica può considerarsi come il luogo dei punti d'intersezione delle curve corrispondenti di due fasci proiettivi di curve*, teorema enunciato e dimostrato da Chasles per le curve di 3.° ordine (*Compt. Rend.* XLI, 1853) e dimostrato pel caso generale da Jonquieres (*Mém. de l'Acad. des sciences*, XVI, 1858), e che generalizza la nota *generazione proiettiva* delle coniche.

Fra i lavori sui sistemi lineari, oltre la *Introduzione* del Cremona, citeremo quelli di Jonquieres (*Math. Ann.*, I), di Caporali (*Collect. Math.*, 1881), di Jung (*Ann. di mat.*, XV, XVI), di Guccia (*Rend. Palermo*, VII) e di altri, oltre tutti quelli altri lavori che trattano della geometria dei gruppi di punti su di una curva e di cui tratteremo a suo luogo.

Per lo studio delle singolarità della Jacobiana di tre curve si può vedere il lavoro di Gerbaldi (*Rend. Palermo*, VIII).

§ 4. — I gruppi di punti su di una curva algebrica.

Nella cosiddetta *Geometria su di una curva algebrica* si studiano le proprietà dei gruppi di punti

che sono segati, su di una curva fondamentale di ordine n, da sistemi di altre curve di ordine qualunque, e specialmente quando tali sistemi sono *lineari*, cioè le loro equazioni contengono *linearmente* dei parametri variabili.

Se la curva fondamentale è una retta, questi gruppi di punti costituiscono le cosiddette *involuzioni di ordine superiore* di cui abbiamo trattato nel Cap. II. § 2.

Occorre premettere alcuni teoremi sui punti di intersezione di due curve.

Si abbia una curva fondamentale f di ordine n, e la si seghi con una curva φ di ordine m, la quale passi per δ punti singolari di f (nel numero δ si intende computato il numero delle volte che φ passa per un punto singolare di f.) I punti di intersezione delle due curve non sono fra loro indipendenti; alcuni di essi sono determinati dagli altri. *Sia k il numero dei punti d'intersezione delle due curve, che sono determinati da tutti i rimanenti; abbiamo allora le disuguaglianze fondamentali:*

$$\text{se } m < n-2, \quad \text{è} \quad k \leqq m\,n - \frac{m\,(m+3)}{2} - \delta$$

$$\left(= \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \delta - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} \right)$$

$$\text{se } m \geqq n-2, \quad \text{è} \quad k \leqq \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \delta.$$

Si dice che una curva è una *curva aggiunta* quando passa $r-1$ volte per ogni punto r^{plo}

di f; se quindi f non ha altri punti multipli che punti doppi e cuspidi, una *curva aggiunta* è una curva non sottoposta ad altre condizioni che di passare *semplicemente* per ogni punto doppio o cuspide di f.

Supponiamo allora che φ sia una *curva aggiunta di ordine* m.

In tal caso, se con k *si indica il numero degli* $n\,m$ *punti d'intersezione di* f *e* φ, *determinati dai rimanenti, sussistono le disuguaglianze (indicando con* p *il genere di* f*)*

$$\text{per } m < n-2, \quad k \leq p - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$$

$$\text{per } m \geq n-2, \quad k \leq p.$$

È notevole che, nel secondo caso, il numero k *non dipende più dall'ordine* m *della curva segante e nel primo caso per* $m = n-3$, *si ha* $k \leq p-1$.

La curva φ sia *una curva aggiunta*. Nella sua equazione vi entrino *linearmente*, un certo numero di parametri arbitrari per modo che tutte le φ ottenute facendo variare tali parametri formino *un sistema lineare.*

Sia Q il numero dei punti d'intersezione mobili di f con φ, cioè il numero dei punti d'intersezione che variano da una φ ad un'altra; se k di essi sono determinati dagli altri $Q-k$, il numero di quelli che possiamo scegliere arbitrariamente su f sarà $Q-k=q$ che noi chiameremo *molteplicità del sistema di* Q *punti* inquantochè vi saranno allora ∞^q gruppi di Q punti segati su f da curve della specie di φ. *Il numero* q *rappresenta*

il numero dei parametri arbitrari che entrano linearmente nella equazione di φ. Il teorema sopraindicato ci dà allora:

Se $m \leq n-3$ *sarà* $q \geq Q - p + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$,

se $m > n-3$ *sarà* $q \geq Q - p$.

Queste stesse formole possono porsi sotto un'altra forma che serve a dare *un limite superiore* per il numero Q quando sia nota la molteplicità q del sistema. Si può dire:

Se $m = n-3$ *è* $Q \leq q + p - 1$,

se $m > n-3$ *è* $Q \leq q + p$.

I signori Brill e Noether (*Math. Ann.* VII) hanno poi trovato anche *un limite inferiore per* Q; *propriamente è sempre*

$$Q \geq \frac{q(q+p+1)}{q+1}.$$

Inoltre, ponendo

$$Q(q+1) - q(q+p+1) = r,$$

esistono ∞^r *sistemi di* Q *punti e molteplicità* q.

Se $r = 0$, *il numero di tali sistemi è finito ed è propriamente*

$$\frac{2!\,3!\ldots q!\,2!\ldots(p-1-Q+q)!\,p!}{2!\,3!\ldots(2q+p-Q)!}$$

(Castelnuovo, *Lincei*, 1889.)

Per $q = 1$ tal numero è

$$\frac{p!}{(p-Q+1)!\,(p-Q+2)!}$$

(Brill-Noether, *Math. Ann.*, VII.)

Col simbolo G_Q^q indichiamo *un gruppo* di un sistema lineare di Q punti e di molteplicità q, e col simbolo g_Q^q indichiamo tutto il sistema di tali gruppi.

Se Q è maggiore di $2p-2$ deve essere esattamente $q = Q - p$.

Se $Q = 2p - 2$ deve essere $q = p - 1$.

Se f è una curva indecomponibile, esistono p curve aggiunte linearmente indipendenti di ordine $n-3$, le quali non hanno su f altri punti comuni che i punti multipli.

Se f si decompone in k fattori, esistono

$$p + k - 1$$

curve aggiunte linearmente indipendenti di ordine $n-3$ (Christoffel, Ann. di Mat.; X).

Le curve aggiunte di ordine $n-3$ tagliano la curva fondamentale f in $2p-2$ punti (esclusi i punti singolari fissi). Ora esiste questo teorema interessante:

Ogni sistema lineare q volte infinito di Q punti, può essere sempre segato sulla curva f fondamentale da un sistema di curve aggiunte di ordine $n-3$, purchè sia

$$q \geqq Q - p + 1,$$

la quale condizione esclude (per un teor. dianzi accennato) che possa essere $Q > 2p - 2$.

In particolare:

Se un fascio ($q = 1$) *di curve aggiunte ha* p *intersezioni mobili colla curva* f, *ogni gruppo di tali* p *punti è situato su una curva aggiunta di ordine* $n - 3$.

Un gruppo di Q punti pei quali passa almeno una curva aggiunta di ordine $n - 3$ si dice un *gruppo speciale;* il *sistema* cui esso appartiene si dirà *speciale.*

Il sistema g_{2p-2}^{p-1} si suol chiamare *sistema canonico.*

Esso (v. sopra) non ha punti fissi ed è unico.

Uno dei teoremi fondamentali della teoria che ci occupa è il cosiddetto *teorema del resto* (Restsatz) che fa vedere in certo modo che i gruppi di punti su di una curva si possono concepire come qualcosa di indipendente dalle curve che servono a segarle.

Due gruppi di punti G_Q, $G_{Q'}$, si dicono *corresiduali* fra loro, se esiste un altro gruppo G_R tale che i due gruppi G_Q e G_R rappresentino tutte le intersezioni mobili (esclusi i punti singolari) di una curva aggiunta con f, e i gruppi $G_{Q'}$ e G_R rappresentino anche tutte le intersezioni mobili di un'altra curva aggiunta con f. I due gruppi G_Q e G_R si chiamano poi *fra loro residuali.*

Il *teorema del resto* dice:

Se G_Q *e* $G_{Q'}$ *sono corresiduali fra loro rispetto al gruppo* G_R, *lo saranno anche rispetto a qualunque altro gruppo* $G_{R'}$, *che insieme con uno di*

essi formi il sistema completo delle intersezioni mobili di una qualunque altra curva con f. In altri termini: *la proprietà di due gruppi di punti di essere corresiduali fra loro è indipendente dal gruppo di punti residuo di ambedue, cioè è indipendente dalle curve seganti che determinano su f quei gruppi di punti.*

O anche: *Se per G_Q faccio passare un'altra qualunque curva aggiunta che seghi la f in un gruppo $G_{R'}$, i gruppi $G_{R'}$, e $G_{Q'}$, formeranno il sistema completo delle intersezioni mobili di una curva aggiunta con f.*

Questo teorema, dal punto di vista algebrico, si trova in Brill-Noether (*Götting. Nachr.*, 1873, e *Math. Ann.*, VII). Esso però ricevette la sua prima origine per il teorema di Abel (v. *Repert.*, I, pag. 400 e seg.) sugli integrali trascendenti.

Si abbia un gruppo di Q punti che appartenga ad un sistema lineare g^q_Q. Sia $\tau = r + 1$ il numero delle curve aggiunte linearmente indipendenti di ordine $n - 3$ che passano per i Q punti; la molteplicità q è data dalla formola

$$q = Q - p + r + 1.$$

Questo teorema è quello detto di Riemann-Roch (*Crelle*, LXIV). Esso fu trovato per l'occasione della teoria delle funzioni algebriche (v. *Repert.*, I, pag. 385). *Il numero r rappresenta il numero dei parametri* NON OMOGENEI *che entrano linearmente nell'equazione generale di una curva aggiunta di ordine $n - 3$ che passa per i Q punti; esso rappresenta la molteplicità del sistema di tali*

curve. Per un sistema generale (non speciale) è $r+1=0$. Il teorema di RIEMANN-ROCH può porsi sotto la seguente altra forma e prende allora il nome di *teorema di reciprocità* di BRILL-NOETHER (nome datogli dal KLEIN):

Una curva aggiunta di ordine $n-3$ *seghi la* f *in* $2p-2$ *punti che si distinguano in due gruppi di* $Q+R=2p-2$ *punti. Il gruppo dei primi* Q *punti appartenga ad un sistema lineare di molteplicità* q; *il gruppo dei secondi* R *punti apparterrà ad un sistema lineare di molteplicità* r *in modo che sussisteranno le relazioni*

$$q-r=Q-p+1$$

$$r-q=R-p+1.$$

Va sotto il nome di teorema di CLIFFORD (*Phil. Trans.* 1878) il teorema seguente che è una conseguenza del teor. di RIEMANN-ROCH:

Se il sistema g_Q^q *è speciale (cioè il corrispondente numero* $r+1$ *è maggiore di zero) deve essere* $Q \geqq 2q$.

Dato un sistema lineare g_Q^q vi saranno certi gruppi di Q punti, appartenenti al sistema, aventi due o più punti coincidenti; questi punti si dicono *punti multipli* del sistema.

Il numero dei punti $(q+1)^{pli}$ *appartenenti al sistema è dato dalla formola*

$$(q+1)(Q+qp-q)$$

(v. BRILL, *Math. Ann.*, IV; CLEBSCH-LINDEMANN,

Geom. (edit. franc.), II, 172). Questioni di questo genere furono trattate da De Jonquieres (*Crelle*, LXVI), Cayley (*Phil. Trans.*, CLVIII) e altri.

Nel sistema g_{2p-2}^{p-1} *cioè nel sistema di tutti i gruppi di punti segati su f da tutte le sue curve aggiunte di ordine* $n-3$, *vi è in generale un numero finito di gruppi di soli* $p-1$ *punti ciascuno contato due volte; tal numero è* $2^{p-1}(2^p-1)$; *questi gruppi corrispondono a curve aggiunte, di ordine* $n-3$, DI CONTATTO *con f, cioè tali che toccano f in ogni punto in cui la incontrano.*

Esistono poi $2^{p-1}(2^p+1)$ *curve aggiunte di ordine* $n-2$ *che toccano f in p punti.*

Però la f può essere una tal curva che di tali gruppi ne esistono infiniti e propriamente ∞^{m-1}. ($m=2, 3, \ldots$). Le studio di tali sistemi ha importanza per la teoria delle funzioni abeliane, e fu cominciato da Weber (*Math. Ann.* XIII), Kraus (*Id.* XVI).

Vogliamo riferire i risultati di Kraus relativi alla natura della curva f quando possiede tali sistemi di gruppi di punti:

Un tipo di curva f che possiede ∞^1 *gruppi di* $p-1$ *punti in cui è toccata da una curva aggiunta di ordine* $n-3$, *è (per* $p>3$) *una curva di* $p+1^{mo}$ *ordine con un punto in cui la curva tocca sè stessa (Selbstberührungspunkt) e con*

$$\frac{(p-4)(p+1)}{2}$$

punti doppi situati su di una curva di ordine

$p-4$. Per $p=3$ si ha invece una curva di quint'ordine con un punto triplo.

Un tipo di curva f su cui esiste un sistema di ∞^2 gruppi di $p-1$ punti come dianzi, è una curva di ordine $p-1$ con $\frac{1}{2}(p-1)(p-6$ punti doppi che stanno su di una curva aggiunta di ordine $p-6$. Il minimo genere per una curva siffatta è $p=6$.

Un tipo di curva f su cui esiste un sistema di ∞^{m-1} $(m>3)$ gruppi come dianzi, è una curva di $p-m+2^{mo}$ ordine con

$$\frac{1}{2}[(p-m)^2-(p+m)]$$

punti doppi che stanno su di una curva aggiunta di ordine $p-m+3$ la quale tocca anche la curva normale in $m-3$ altri punti. Il minimo valore di p per il caso di $m=4$ è $p=q$.

L'esistenza di tali sistemi di gruppi corrisponde all'esistenza di funzioni ϑ le quali si annullano insieme alle loro derivate di vari ordini, per argomenti zero; ma su questi dettagli non possiamo entrare (v. Weber cit.)

E importante a questo proposito il seguente altro teorema (di Weber):

I $(p-1)+(p-1)=2p-2$ punti di contatto di due curve aggiunte di contatto di ordine $n-3$ appartenenti allo stesso sistema, sono situati su di un'altra medesima curva aggiunta di ordine $n-3$.

Di qui risulta l'esistenza di certe *relazioni quadratiche identiche* che devono allora sussistere fra

i primi membri delle equazioni delle curve aggiunte di ordine $n-3$.

Una categoria molto importante di curve è quella delle cosiddette *curve iperellittiche*. Dal punto di vista della teoria dei gruppi di punti, queste curve sono definite dalla proprietà di possedere un sistema g_2^1.

In questo sistema g^1_2 *esistono* $2p+2$ *coppie di punti coincidenti.*

In una curva iperellittica i punti sono accoppiati in modo che ogni curva aggiunta di ordine $n-3$ *che passi per uno dei punti della coppia, passa necessariamente anche per l'altro.*

Una formola che, nella teoria che ci occupa, ha molta importanza e svariate applicazioni è quella cosiddetta *formola di corrispondenza* di Cayley e Brill, e che può reputarsi una generalizzazione di quella di Chasles (v. Cap. I, § 2).

Supponiamo assegnata una relazione

$$\Phi\,(x_1\,x_2\,x_3, \quad y_1\,y_2\,y_3)=0$$

di grado r in (x) e s in (y).

Dato un punto (x), questa determinerà una curva del piano che segherà la f fondamentale in $n\,s$ punti, e dato un punto (y), si avrà una curva che segherà la f in nr punti.

Si scelgano i punti (x) (y) sulla curva f; variando (x) sulla curva f si avrà una serie di gruppi di $n\,s$ punti su f, e variando (y) anche su f si

avrà una serie di gruppi di $n r$ punti. Si ha dunque *una corrispondenza fra due serie di gruppi di punti su f*. La formola in discorso dà il numero dei *punti uniti* di questa corrispondenza.

Supponiamo che ad un punto (x) corrispondano β punti (y), dati dalle intersezioni di una curva della seconda serie con f, la quale curva della seconda serie incontri poi ancora f in γ punti coincidenti con (x), e che ad un punto (y) corrispondano α punti dati dalle intersezioni con f, di una curva della seconda serie. Questa curva della seconda serie deve passare ancora γ volte per (y), e il numero dei punti (x) che coincidono con punti corrispondenti (y) è dato da

$$\alpha + \beta + 2 \gamma p.$$

Se $p = 0$ (cioè se f è razionale) questa formola si riduce a quella di Chasles.

I punti di coincidenza formano sempre il sistema completo delle intersezioni di f con un' altra curva.

Il teorema sopraindicato fu enunciato prima da Cayley (*Compt. Rend.*, LXII; *Proc. Lond. math. Soc.*, I); indi fu dimostrato da Brill (*Math. Ann.*, VI, VII, XXXI; v. anche Junker, *Diss.* Tübingen, 1889). Altre dimostrazioni sono quelle di Schubert (*Calcul der abzähl. Geom.*, § 18), Bobek (*Wien Ak.*, XCIII), Lindemann (*Crelle*, LXXXIV), Hurwitz (*Math. Ann.*, XXVIII), Zeuthen (*Math. Ann.*, XL), Segre (*Ann. di mat.* XXII, § 12), etc. Alcuni di questi autori (p. es. Hurwitz) hanno anche considerato un teorema

più generale. Si può anche vedere un paragrafo dedicato a questo teorema nella *Geom.* di Clebsch-Lindemann.

La geometria dei gruppi di punti su di una curva si può dire fondata da Riemann il quale però considerava tale teoria dal punto di vista (che in fondo è lo stesso) della teoria delle funzioni algebriche su di una superficie Riemanniana (v. *Repert.*, I, Cap. XV); indi questa teoria si è svolta secondo vari indirizzi; l'indirizzo, che potremo chiamare, *funzionale* e che fa capo appunto a Riemann, e ai numerosi lavori che riguardano gli integrali abeliani; l'indirizzo *algebrico-geometrico* che fa capo ad una fondamentale Memoria di Brill-Noether (*Math. Ann.*, VII); l'indirizzo *algebrico-aritmetico* (Kronecker, Dedekind, Weber). In questi ultimi tempi si è aggiunto anche l'indirizzo *geometrico puro*, per il quale si può vedere con profitto un recente lavoro di Segre (*Ann. di mat.*, XXII).

L'importanza della teoria dei gruppi di punti è grandissima nello studio della trasformazione biunivoca delle curve piane (vedi sotto), perchè per quella trasformazione le proprietà dei gruppi presentano caratteri invariantivi.

Per amore di brevità tralasciamo di citare tutti i numerosi altri lavori di Noether, Brill, etc.

I signori Küpper, Bobek, Amodeo (cfr. *Lincei*, 1893; *Ann. di mat.*, XXI, XXIV; *Acc. Nap.*, 1896) hanno anche studiato le cosiddette curve k-gonali cioè quelle che possiedono una serie lineare $g^1{}_k$

senza avere una serie lineare semplicemente infinita, di grado minore, e di cui le curve iperelittiche sono caso particolare.

Naturalmente ogni curva è k-gonale, purchè k abbia valore conveniente.

Aggiungeremo che un lavoro recente in cui si può trovare trattata la teoria col metodo algebrico è quello di BERTINI (*Ann. di mat.*, XXII). * Altre indicazioni si trovano in un lavoro storico di BRILL-NOETHER (*Jahresber. d. D. Math. Vereinig.*, III, 1892-93).

§ 5. — TRASFORMAZIONI BIUNIVOCHE DEL PIANO O DI CURVE PIANE. — TRASFORMAZIONI MULTIPLE.

Poniamo

$$y_i \equiv f_i(x_1 x_2 x_3)^{**} \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (1)$$

essendo le f_i funzioni razionali intere di ordine n nelle $x_1 x_2 x_3$ (senza fattore comune); e supponiamo che risolvendo queste due relazioni rispetto alle x si abbia

$$x_i \equiv \varphi_i(y_1 y_2 y_3) \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (2)$$

dove le φ sieno anche funzioni razionali intere.

* Le note di AMODEO contengono qualche svista facilmente correggibile. Il lavoro del BERTINI contiene poi, per conto suo, altre sviste nei punti in cui cerca di correggere quelle di AMODEO.

** Il segno $\equiv$ significa *proporzionalità*; le relazioni sovrascritte sono perciò sostanzialmente *due*, non *tre*.

Allora diremo che le (1) determinano *una trasformazione birazionale, o biunivoca piana*, nel senso che per esse si possono far corrispondere i punti di due piani (piano x e piano y, che potrebbero anche essere sovrapposti) in modo che *ad un punto dell'uno corrisponde uno e uno solo punto dell'altro e viceversa.*

Una siffatta trasformazione si dice anche *trasformazione birazionale* o *Cremoniana* dal nome di chi per il primo l'ha stabilita in tutta la sua generalità.

Una prima proprietà fondamentale è la seguente:

Il grado delle φ_i deve essere il medesimo del grado delle f_i.

Inoltre:

Perchè la trasformazione sia biunivoca è necessario che la rete formata colle tre curve

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$$

abbia $n^2 - 1$ punti fissi (punti fondamentali della trasformazione). Una tal rete, come si sa, si chiama *omaloidica* (v. pag. 225).

Lo stesso naturalmente deve anche verificarsi per la rete delle tre curve $\varphi_i = 0$.

Le curve $f_i = 0$, $\varphi_i = 0$ devono essere tutte di genere zero, e i loro punti multipli devono trovarsi tutti nei punti fondamentali della trasformazione.

Se supponiamo che fra gli $n^2 - 1$ punti fondamentali ve ne sieno α_1 semplici per tutte le curve, α_2 doppi per tutte le curve... α_{n-1} $(n-1)^{pli}$ per tutte le curve, *fra i numeri α devono sussistere le*

tre relazioni di cui una è conseguenza delle altre due:

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1$$

$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+3) - 2.$$

Dato il valore di n si possono da queste formole trovare i valori possibili per i numeri α; delle tavole sono state costruite a questo scopo da CREMONA e CAYLEY.

Un punto fondamentale k^{plo} per tutte le curve della trasformazione si dice *un punto fondamentale d'ordine k.*

Le precedenti formole sussistono se le f (e le φ) non hanno tangenti comuni nei punti fondamentali.

Ad un punto fondamentale d'ordine k in un piano, corrisponde nell'altro una curva d'ordine k e di genere zero (curva fondamentale k^{ma}).

Le curve fondamentali di un piano hanno i loro punti multipli nei punti fondamentali del medesimo piano, e non si tagliano fra loro che in questi.

La curva fondamentale k^{ma} passa per il punto fondamentale d'ordine h, lo stesso numero α_{kh} di volte che la curva fondam. d'ord. h passa per il punto fond. d'ord. k.

Si ha dunque $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$. Inoltre il determinante $|\alpha_{hk}| = \pm n$.

Una curva fondamentale passa per un punto fond. d'ord. k, $3k-1$ volte.

Se, come sopra, α_i è il numero dei punti fondamentali d'ordine i, in uno dei piani, e β_i l'analogo numero nell'altro piano, si ha $\Sigma \alpha_i = \Sigma \beta_i$, e i numeri β non differiscono dai numeri α che solo nell'ordine (teor. di Cremona*).*

La somma dei tre numeri d'ordine dei tre punti fondamentali d'ordine più elevato è sempre maggiore di n.

È importantissimo il seguente teor.:

Ogni trasformazione Cremoniana può essere sempre surrogata da un numero finito di trasformazioni quadratiche, di cui i tre punti fondamentali sono nei tre punti fondamentali di ordine più elevato della trasf. primitiva.

Questo teor. fu dato da Clifford (v. Cayley *Proc. of the Lond. math. Soc.*, III), Noether (*Math. Ann.*, III, V), Rosanes (*Crelle*, LXXIII).

Per una trasformazione quadratica ($n=2$), *alle rette di un piano corrispondono nell'altro, coniche che passano per tre punti fissi, e al punto d'intersezione di due rette, corrisponde il quarto punto d'intersezione delle due coniche corrispondenti.*

Le equazioni della trasf. quadratica possono sempre ridursi alla forma (Cayley)

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 .$$

Ponendo i tre punti fondamentali, due nei due punti ciclici del piano, e il terzo nell'origine delle coordinate *cartesiane*, si ha la cosiddetta *trasformazione per raggi vettori reciproci, o inversione;*

alcuni danno il nome di *inversione* alla trasformazione quadratica generale.

Per una trasformazione quadratica, a una curva di m^{mo} *ordine, passante* k_1, k_2, k_3 *volte per i tre punti fondamentali, corrisponde una curva di ordine* $2m - k_1 - k_2 - k_3$ *passante* $m - (k_2 + k_3)$, $m - (k_3 + k_1)$, $m - (k_1 + k_2)$ *volte per i punti fondamentali del proprio piano.*

Per una trasformazione d'ordine n, *ad una curva d'ordine* m *passante* l_i *volte per un punto fondamentale d'ordine* r_i, *corrisponde una curva d'ordine* $\mu = n\,m - \Sigma\, r_i\, l_i$, *passante*

$$\lambda_k = m\, s_k - \sum_i r_i\, \alpha_{ik}$$

volte per un punto fondamentale d'ordine s_k *(le* α_{ik} *hanno il significato sopraindicato).*

Se vogliamo che la trasformazione non sia biunivoca *per tutto il piano*, ma solo per i punti di due curve F e F' corrispondenti, allora non è più necessario che la rete di trasformazione sia *omaloidica. Bisognerà però che le curve della rete che si taglino in un punto di* F, *non si taglino ulteriormente in altro punto di* F *almenochè quest'ultimo punto non sia un punto fondamentale, cioè comune a tutte le curve della rete.*

Per una trasformazione birazionale il genere di una curva resta inalterato (teor. di Riemann, *detto della conservazione del genere).*

Una curva, non riduttibile, razionale si può trasformare birazionalmente in una retta.

Una curva di genere 1 (curva ellittica) si può birazionalmente trasformare in una curva di 3.º ordine.

Le curve aggiunte di ordine $n - 3$ (v. § 4) godono di una rimarchevole proprietà per una trasformazione *birazionale;* propriamente:

Se per una trasformazione birazionale una curva F di ordine n diventa F' di ordine ν, il sistema dei punti d'intersezione colle curve aggiunte di ordine $n - 3$ di F si trasforma nel sistema dei punti d'intersezione di F' colle sue curve aggiunte di ordine $\nu - 3$.

Considerando una rete di curve aggiunte di ordine $n - 3$, relative ad una data curva F, di genere p, prendendo i punti base della rete tutti sulla curva F, e assumendo infine tale rete come base di una trasformazione birazionale della curva, *la curva F si trasforma in una di ordine $p + 1$ con punti multipli equivalenti a $\frac{1}{2} p (p - 3)$ punti doppi.*

Una tal curva può prendersi come *tipo normale* per una curva di genere p.

Scegliendo poi in maniera speciale su F i $p - 3$ punti base della rete, la curva trasformata diventa quella di *minimo ordine* possibile in cui può trasformarsi una curva di genere p; *tale minimo ordine è rispettivamente*

$$2\pi + 2 \quad \text{se} \quad p = 3\pi$$

$$2\pi + 3 \quad \text{se} \quad p = 3\pi + 1$$

$$2\pi + 4 \quad \text{se} \quad p = 3\pi + 2$$

(Brill-Noether, *Math. Ann.*, VII.)

A questi problemi si riattacca quello della determinazione del numero dei *moduli* di una curva di dato genere, cioè del numero di quelle funzioni dei coefficienti dell'equazione della curva che si comportano come *invarianti assoluti* rispetto ad una qualunque trasformazione birazionale.

Il risultato cui si giunge è il seguente (RIEMANN):

Per $p = 0$, cioè per le curve razionali, il numero dei moduli è zero; per $p = 1$, cioè per le curve ellittiche, il numero dei moduli è 1; per $p > 1$ il numero dei moduli è $3p - 3$.

Un'importante applicazione della trasformazione Cremoniana del piano è quella cosiddetta della *scomposizione delle singolarità.*

Mediante una trasformazione Cremoniana si può ottenere da una curva con punti multipli a tangenti coincidenti, una curva con sole singolarità ordinarie, cioè con soli punti multipli a tangenti distinte.

Questo problema fu trattato specialmente da NOETHER (*Gött. Nach.*, 1871; *Math. Ann.*, IX).

Indi con trasformazioni birazionali della curva si può ridurre la curva che ha sole singolarità ordinarie, in altra con soli punti doppi (v. BERTINI, *Math. Ann.*, XLIV).

Le trasformazioni birazionali *quadratiche* erano state considerate da MAGNUS (*Sammlung von Aufg.*, etc. Berlin, 1833) e da STEINER (*Crelle*, VIII), ma la teoria generale delle trasformazioni

birazionali fu stabilita da Cremona (*Acc. Bologna*, 1863, 1865; *Giorn. di Batt.*, I, III). Altri lavori importanti furono: Cayley (*Proc. London math. Soc.*, III, 1870), Rosanes (*Crelle*, LXXIII), Clebsch (*Math. Ann.*, III), Noether (*Id.*, V).

Per una esposizione della teoria delle trasformazioni birazionali sia fra piani, che fra curve, si può con profitto consultare la *Geom.* di Clebsch-Lindemann.

Sono state considerate anche le trasformazioni non biunivoche (multiple) fra due piani; e le trasformazioni multiple fra due curve.

Una formola che lega i generi di due curve in corrispondenza non biunivoca è quella di Zeuthen.

Si abbiano due curve in corrispondenza tale che ad un punto della prima (di genere p) corrispondano m punti della seconda (di genere p') e ad un punto della seconda, m' punti della prima. Sulle due curve vi sieno rispett. μ, μ' coincidenze, cioè accada μ volte che sulla prima curva fra i punti corrispondenti ad un punto della seconda, ve ne sieno due coincidenti, ecc. *Si ha allora la formola* (Zeuthen, *Math. Ann.*, III).

$$\mu - \mu' = 2\,m'\,(p-1) - 2\,m\,(p'-1).$$

Par $m = m' = 1$ si ha la corrispondenza biunivoca, e da questa formola risulta $p = p'$ (*teor. di* Riemann).

Fra le corrispondenze multiple fra due piani sono comprese le *isogonali*, cioè quelle che con-

servano gli angoli (vedi l'opera di Holzmüller (*Th. der isog. Verwandsch.* Leipzig, 1883).

I principali lavori sulle trasformazioni multiple sono quelli di Wiener (*Math. Ann.*, III), De Paolis (*Mem. Lincei*, 1877-78), Noether (*Erl. Ber.*, 1878), Jung (*Rend. Lincei*, 1886; *Ist. Lomb.*, 1888), Bertini (*Ist. Lomb.*, 1889).

CAPITOLO VII.

Le cubiche piane.

§ 1. — Generalità sulle cubiche. Punti di flesso. Punti tangenziali.

L'equazione generale di una curva di 3.° ordine contiene omogeneamente dieci coefficienti; quindi dati nel piano nove punti arbitrariamente, *per essi passerà in generale una sola cubica.*

I nove punti possono essere però dipendenti fra loro in modo che per essi passino infinite cubiche.

Tutte le cubiche che passano per otto punti del piano, passano anche per un nono punto determinato dai primi.

La cubica è in generale di 6.ª classe e di genere 1; ha nove punti di flesso.

Se la cubica ha un punto doppio, il suo genere è zero, ed essa è di 4.ª classe, ha tre punti di flesso allineati. L'equazione di una tal cubica dipende da otto costanti.

Se la cubica ha una cuspide, il suo genere è ancora zero, la sua classe è 3, e il numero dei

suoi flessi è 1. L'equazione di una tal cubica dipende da sette costanti.

La congiungente due punti di flesso passa sempre per un terzo flesso.

I nove punti di flesso sono situati a tre a tre su 12 rette, e per ciascun flesso passano quattro di tali rette.

I nove punti di flesso non possono essere tutti reali; al massimo ve ne sono solo tre reali.

Le quattro di tali rette passanti per un flesso formano un gruppo equianarmonico.

Queste 12 rette formano quattro terne di rette, tali che ogni terna contiene tutti i nove punti di flesso; ognuno dei triangoli che ha per lati le tre rette di una terna, si dice *triangolo d'inflessione.*

Per i nove punti di flesso di una cubica passano infinite cubiche aventi tutti i medesimi punti di flesso; il fascio di tutte queste cubiche si dice *fascio sizigetico.*

Indicando con $f=0$ l'equazione della cubica data e con $H=0$ l'equazione della cubica *Hessiana* (v. Cap. V), *il fascio sizigetico ha per equazione*

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H = 0.$$

Fra le curve di questo fascio sono compresi dunque anche i quattro triangoli d'inflessione.

La conica polare di un flesso si scinde in due rette, di cui l'una è la tangente d'inflessione, e l'altra è un'altra retta che si chiama la polare armonica del flesso.

La polare armonica del flesso ha la proprietà che ogni retta condotta per il flesso, la taglia in

un punto che è il coniugato armonico del flesso stesso rispetto agli altri due punti in cui la retta segante incontra la cubica. Di qui viene il nome di *polare armonica.*

Quindi anche:

La polare armonica di un flesso taglia la cubica nei tre punti di contatto delle tangenti condotte dal flesso alla cubica stessa.

Tutte le cubiche del fascio sizigetico hanno anche le medesime polari armoniche.

Le tangenti di due flessi si incontrano sulla polare armonica del flesso che è allineato coi due primi.

Le polari armoniche di tre flessi allineati si incontrano in un punto.

Ad ogni punto di una cubica ne corrisponde un altro, che è il punto d'intersezione colla cubica della tangente nel primo punto.

Tal punto si dice *punto tangenziale o satellite del dato.*

I tre punti tangenziali di tre punti in linea retta sono anche in linea retta (retta satellite della prima).

Esiste una retta del piano (la retta satellite della retta all'infinito) che ha la proprietà, che la distanza di un punto della curva da essa sta in un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dai tre assintoti (le tangenti nei tre punti all'infinito).

I quattro punti di contatto delle quattro tangenti che da un punto P della curva possono condursi alla curva stessa, formano un quadrangolo di cui i tre punti diagonali sono situati anche

sulla curva; e le tangenti della curva in tali tre punti, insieme alla tangente in P concorrono in un medesimo punto della curva stessa.

Il RAPPORTO ANARMONICO *delle quattro tangenti che da un punto della curva si possono condurre alla curva stessa, è costante al variare del primo punto.* Questa proprietà è molto importante.

Per un punto A di una cubica conduciamo una retta che incontri la curva in due altri punti P, Q; e formiamo indi il quadrangolo completo avente per vertici i quattro punti di cui A è punto tangenziale; due lati opposti di questo quadrangolo tagliano la retta data in due punti coniugati armonici fra loro rispetto a P e Q. (teor. di MACLAURIN.)

Si abbiano tre punti A, B, C in linea retta di una cubica; da A e B si conducano due tangenti alla curva; la retta che congiunge i due punti di contatto taglia la curva in un punto di cui il punto tangenziale è C.

Se i punti tangenziali di tre punti A, B, C sono in linea retta, saranno in linea retta i punti A' B' C' in cui BC, CA, AB tagliano nuovamente la cubica.

Esiste un numero infinito di poligoni di $2n$ lati e $2n$ vertici, tali che mentre i vertici sono situati sulla cubica, i lati pari si incontrano tutti in un punto A, e i lati dispari in un punto B (poligoni di STEINER, *Crelle,* XXXII). I due punti A e B si dicono *associati.*

Lo studio di questi poligoni si fa ottimamente mediante la teoria delle funzioni ellittiche (vedi più sotto).

La Hessiana e la Steineriana d'una cubica sono identiche e sono curve di 3.° ordine.

La Cayleyana di una cubica è una curva di 3.ª classe e di 6.° ordine; essa è l'inviluppo di tutte le coniche polari dei punti del piano, le quali si scindono in due rette.

Una cubica qualunque può considerarsi come la Hessiana di tre altre cubiche, e ogni curva di 3.ª classe può considerarsi come Cayleyana di una cubica.

Si abbiano due rette u, u', e si consideri il fascio di coniche polari dei punti di u rispetto alla cubica. Il polo di u', rispetto a ciascuna di queste coniche del fascio, percorre una conica che si chiama la *poloconica mista delle due rette* (Cremona). Se le due rette coincidono si ha:

La curva inviluppata dalla retta polare, rispetto ad una cubica, di tutti i punti di una retta, è una conica che si chiama la poloconica pura della retta.

La Hessiana è toccata dalla poloconica pura di una retta nei tre punti in cui la retta taglia la Hessiana stessa.

Se da un punto del piano si conducono le sei tangenti ad una cubica, i punti tangenziali dei sei punti di contatto si trovano su di una conica la quale si chiama la conica satellite (Cremona) *del punto a, o della conica polare di a (su cui stanno i sei punti di contatto delle sei tangenti).*

La conica polare di un punto, e la conica satellite dello stesso punto si toccano nei due punti in cui esse sono tagliate dalla retta polare del punto.

Se una conica ha con una curva di 3.° ordine due punti di contatto di 2.° ordine (due punti ciascuno dei quali è da considerarsi come la riunione di tre punti infinitamente vicini) la congiungente tali due punti passa per un flesso. Di tali coniche ne esistono nove sistemi.

Per ogni punto di contatto di una tangente condotta alla cubica da un punto di flesso, passa una conica che ha colla cubica in quel punto un contatto di 5.° ordine.

Un siffatto punto, cioè un punto su di una curva tale che in esso una conica può avere colla curva un contatto di 5.° ordine, si dice un *punto sestatico* della curva.

Sulla cubica esistono 27 punti sestatici. Essi corrispondono anche ai 27 punti d'intersezione della cubica colle nove polari armoniche.

Esistono tre sistemi diversi e composti ciascuno d'un numero doppiamente infinito di coniche che toccano una curva di 3.° ordine in tre punti.

I punti tangenziali dei tre punti in cui una di tali coniche tocca la cubica sono in linea retta.

Le cubiche piane furono studiate da Newton (*Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1704) e Maclaurin (*De linearum geom. proprietatibus generalibus Tractatus*). Nei tempi più moderni esse furono studiate da Plücker (*System der anal. Geom.*, 1835), da Steiner (*Op.*, II), da Hesse (*Crelle*, XXVIII, XXXVI, XXXVIII), da Salmon (*Crelle*, XLII), da Cayley, da Chasles, da Cremona, da Durege e da molti altri autori.

Le curve di 3.ª classe furono studiate da CAYLEY (*Journ. de Liouville*, IX, 1844; *Phil. Trans.*, 1857), da HESSE *(cit.)*, da BELLAVITIS (*Istituto Veneto*, 1852), ecc.

Le opere principali dove si trovano raccolte le proprietà delle cubiche sono quelle di CREMONA (*Introd.*, ecc.), SALMON (*Higher plane curves*), DUREGE (*Die ebenen Curven 3.ter Ordn.* Leipzig, 1871), SCHROETER (*Theorie der ebenen Curven 3.ter Ordn.* Leipzig, 1888), CLEBSCH-LINDEMANN (*Geom.*).

La teoria delle funzioni ellittiche fu applicata allo studio delle cubiche piane, per la prima volta in una Memoria di CLEBSCH (*Crelle*, LXIII).

Per questo argomento si può vedere la Geom. di CLEBSCH-LINDEMANN e un capitolo del II vol. dell'opera di HALPHEN *(Fonct. ellipt.)*.

Per le proprietà delle varie cubiche di genere zero *(unicursali, razionali)* citeremo l'opera recente di BINDER (*Theorie der unicursalen Plancurven.* Leipzig, 1896).

§ 2. — GENERAZIONI PROIETTIVE DELLE CUBICHE.

Date nel piano tre coppie di punti A, A_1; B B_1; C, C_1 tali che non sieno i vertici opposti di un quadrilatero completo, il luogo di un punto P tale che le tre coppie di raggi PA, PA_1; PB, PB_1; PC, PC_1 siano in involuzione, è una curva generale di 3.º ordine, che passa per i sei punti dati. A tale luogo appartengono i punti d'intersezione

di $A\,B$, $A_1\,B_1$, e così di $A\,B_1$, $A_1\,B$; chiamiamoli rispett. D, D_1; così si avranno i punti

$$E = (A\,C,\ A_1\ C_1),\ E_1 = (A\,C_1,\ A_1\,C),\ \text{ecc.}$$

I punti come A, A_1; B, B_1; D, D_1, ecc. si chiamano *punti coniugati.*

La proprietà caratteristica di due punti coniugati è la seguente:

Le tangenti in due punti coniugati si incontrano sulla curva stessa in un punto che è a sua volta il punto coniugato del terzo punto d'intersezione colla curva della retta che congiunge i due primitivi punti coniugati.

Altre generazioni proiettive delle cubiche sono le seguenti:

Si consideri un fascio di coniche e un fascio di rette rispett. fra loro proiettivi (i parametri di una conica e di una retta dei due fasci sieno legati da una relazione bilineare); *il luogo dei punti d'intersezione di un raggio colla conica corrispondente è una cubica che passa per il centro del fascio di rette e per i quattro punti-base del fascio di coniche* (CHASLES).

Se su di una cubica si assumono quattro punti come punti-base di un fascio di coniche, ogni conica di tal fascio segherà ancora la curva in due punti la cui congiungente passa per un punto FISSO *della cubica stessa (punto* OPPOSTO *ai quattro punti dati).*

Si consideri il sistema (schiera) di coniche tangenti a quattro rette date; da due punti dati si conducano le due coppie di tangenti a ciascuna conica del sistema; il luogo dei punti d'intersezione di tali tangenti è una cubica generale.

Un'altra generazione delle cubiche è quella detta di GRASSMANN:

Un punto P descrive una curva di 3.° ordine se le rette che lo congiungono a tre punti fissi incontrano tre altre rette fisse in tre punti allineati. In tal caso questa retta mobile in cui sono allineati i tre punti inviluppa una curva di 3.ª classe.

Per un'altra costruzione geometrica di SCHROETER v. *Math. Ann.*, V.

Per la costruzione di una cubica, dati nove punti di essa, e per la costruzione del nono punto per cui passano tutte le cubiche del fascio determinato da 8 punti, vedi principalmente CHASLES (*Compt. Rend.*, 1853), CAYLEY (*Quart. J. of math.*, V, 1862), CREMONA (*Introd.*), ecc.

§ 3. — FORME CANONICHE DELL'EQUAZIONE DI UNA CUBICA. — CLASSIFICAZIONI VARIE DELLE CUBICHE.

Prendendo per vertice ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) *del triangolo fondamentale delle coordinate un punto di flesso della curva, per retta* $x_3 = 0$ *la tangente di flesso, e per retta* $x_2 = 0$ *la polare armonica del medesimo flesso, l'equazione (in coordinate omogenee) della cubica è*

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3.$$

Scindendo il polinomio del secondo membro nei suoi tre fattori lineari, ciascuno di questi, eguagliato a zero, rappresenta una delle tre tangenti che dal flesso possono condursi alla curva.

Scegliendo per retta $x_1 = 0$ una di tali tangenti, l'equazione della curva può ridursi alla forma

$$x_3 x_2^2 = x_1 (x_1 - x_3)(x_1 - k^2 x_3);$$

ovvero anche alla forma (con altra opportuna scelta dell'asse $x_1 = 0$)

$$x_3 x_2^2 = 4 x_1^3 - g_2 x_1 x_3^2 - g_3 x_3^3.$$

Riducendo l'equazione della cubica sotto una delle forme precedenti si vede che *le coordinate di un punto della curva sono proporzionali a funzioni ellittiche di un parametro. Propriamente può porsi*

$$x_1 : x_2 : x_3 = p(u) : p'(u) : 1$$

dove p, p' sono le funzioni ellittiche di Weierstrass.

Quando, ridotta la equazione della cubica sotto l'ultima forma indicata, si ha $g_3 = 0$ allora si ha la cosiddetta *cubica armonica* la quale ha la proprietà che *le quattro tangenti condotte da un punto della cubica alla curva stessa formano un gruppo armonico.*

Quando invece è $g_2 = 0$, allora si ha la *cubica equianarmonica,* la quale ha la proprietà *che le quattro tangenti condotte da un punto della curva alla curva stessa, formano un gruppo equianarmonico.*

Se si assume come triangolo fondamentale delle coordinate uno dei triangoli d'inflessione, l'equazione di una cubica generale diventa:

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\, b\, x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Se si assume come triangolo fondamentale delle coordinate quello formato da tre tangenti d' in-

flessione l'equazione della cubica è

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 27\,k\,x_1\,x_2\,x_3 = 0.$$

L'equazione di una cubica con un punto doppio (cubica razionale) si può ridurre alla forma

$$x_1^3 + x_2^3 + 6\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

prendendo per triangolo delle coordinate quello formato dalla retta $x_3 = 0$ *in cui sono allineati i tre punti di flesso, e dalle due tangenti nel punto doppio* $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$.

L'equazione di una cubica con una cuspide si può ridurre alla forma

$$x_2^3 - 3\,x_1^2\,x_3 = 0$$

prendendo per triangolo fondamentale quello formato dalla tangente cuspidale $(x_1 = 0)$, *dalla tangente nell'unico punto di flesso* $(x_3 = 0)$ *e dalla congiungente la cuspide col flesso* $(x_2 = 0)$.

Se l'equazione della cubica si pone sotto la forma

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0,$$

l'equazione della Hessiana è (v. § 4)

$$H = -6\,m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\,(1 + 2\,m^3)x_1x_2x_3 = 0,$$

e l'equazione della Cayleyana è (in coordinate di rette)

$$s = -6\,m\,(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 6(1 - 4\,m^3)\,u_1\,u_2 u_3 = 0.$$

L'equazione di una cubica si può ridurre a contenere solo i cubi di quattro forme lineari nelle coordinate.

Una di queste si scelga arbitrariamente; essa eguagliata a zero rappresenterà una retta, e si consideri il fascio delle coniche polari dei punti di questa retta rispetto alla cubica.

Le tre diagonali del quadrangolo che ha per vertici i quattro punti-base di tal fascio di coniche corrispondono alle altre tre forme lineari che insieme alla data, possono, mediante i loro cubi, servire a rappresentare l'equazione della curva data (v. su ciò Salmon-Fiedler, *Höh. Curv. nota 55).*

Una curva generale di 3.° ordine (senza punti doppi) di cui l'equazione è a coefficienti reali può avere due forme diverse, cioè o risulta di un sol ramo reale (che si estende all'infinito) o di due rami reali separati (v. Cap. V, § 1). *Quella che risulta di un ramo solo ha la proprietà che da un suo punto si possono condurre alla curva (oltre la tangente nel punto stesso) due tangenti reali (le altre due sono immaginarie). Quella che risulta di due rami (un'ovale e un ramo che si estende all'infinito) ha la proprietà che da ogni punto dell'ovale non si può condurre alcuna tangente reale alla curva (oltre la tangente nel punto che si considera), e da ogni punto del ramo che si estende all'infinito si possono condurre quattro tangenti reali alla curva, due all'ovale, e due al ramo cui appartiene il punto.*

Le cubiche ad un sol ramo si distinguono secondo il modo con cui sono tagliate dalla retta all'infinito del piano; cioè:

a) La serpentina ellittica ha un sol punto reale all'infinito, e la tangente in esso si estende al finito ed è perciò un assintoto della curva.

b) La serpentina parabolica ha oltre un punto reale all'infinito, ancora reali e coincidenti gli altri due punti d'intersezione; quindi essa ha un assintoto al finito, ed è tangente alla retta all'infinito.

c) La serpentina iperbolica ha tre punti reali all'infinito e perciò tre assintoti al finito.

Le cubiche a due rami si distinguono similmente in:

a) Serpentina ellittica con ovale ellittica, con un sol punto reale all'infinito, situato sulla serpentina.

b) Serpentina ellittica con ovale parabolica, con un punto reale all'infinito, e gli altri due coincidenti situati sull'ovale, che ha una forma parabolica.

c) Serpentina ellittica con ovale iperbolica, con un punto reale all'infinito sulla serpentina, e due punti reali all' infinito sull'ovale che ha una forma iperbolica.

d) Serpentina parabolica con ovale ellittica; tre punti reali all' infinito; di cui almeno due coincidenti, tutti situati sulla serpentina.

e) Serpentina iperbolica con ovale ellittica; tre punti reali distinti all'infinito, tutti situati sulla serpentina.

Un'altra classificazione delle curve di 3.° ordine di cui l'equazione è a coefficienti reali è quella fatta da Newton in cinque specie di parabole divergenti. Come abbiamo già detto, con opportuna trasformazione reale di coordinate, l'equazione di ogni siffatta curva del terz'ordine può ridursi al tipo:

$$x_3\, x_2^2 = a\, x_1^3 + 3\, b\, x_1^2\, x_3 + 3\, c\, x_1\, x_3^2 + d\, x_3^3,$$

dove a, b, c, d sono reali. Basta prendere per retta $x_3 = 0$ una delle tangenti d'inflessione (reale) della curva, per punto ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) tal punto d'inflessione (reale), e per retta $x_2 = 0$ la polare armonica di tal punto rispetto alla curva.

Trasportando all'infinito la tangente d'inflessione $x_3 = 0$, si ha: *l'equazione in coord. cartesiane d'ogni cubica può ridursi alla forma*

$$y^2 = a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 3\,c\,x + d.$$

Tenendo allora conto della natura dei fattori del polinomio che figura al 2.° membro in questa equazione, abbiamo *la distinzione delle cubiche in cinque specie di parabole divergenti* (Newton), cioè:

a) I tre fattori del polinomio sono tutti reali; la curva risulta di un'ovale e di una serpentina.

b) Un solo fattore è reale; la curva risulta solo di una serpentina.

c) Due dei tre fattori sono eguali, cioè il polinomio si scompone in $(x - \alpha)^2 (x - \beta)$ *dove* $\alpha < \beta$; *la curva è formata di una serpentina, e l'ovale si riduce o a due punti immaginari coniugati o ad un punto unico reale.*

d) Il polinomio si scompone anche in $(x - \alpha)^2 \times (x - \beta)$ *ma sia* $\alpha > \beta$; *l'ovale e la serpentina si riuniscono in modo da formare un solo ramo continuo e segante sè stesso; la curva ha un punto doppio.*

e) I tre fattori del polinomio sono tutti eguali; la curva viene ad acquistare un punto cuspidale.

Trasportando all'infinito invece la polare armonica $x_2 = 0$, *l'equazione cartesiana della cubica può sempre anche scriversi*

$$y = a\,x^3 + 3\,b\,x^2\,y + 3\,c\,x\,y^2 + d\,y^3.$$

Questa cubica ha un CENTRO, *che è il punto di inflessione* ($x = 0$, $y = 0$) *cioè ogni corda condotta per tal punto è bisecata in esso;* eseguendo allora sui fattori del secondo membro la stessa distinzione fatta sopra, si ha *la distinzione delle cubiche in cinque specie di curve a centro* (CHASLES).

Un'altra classificazione delle cubiche è finalmente quella fatta da PLÜCKER, e studiata anche da CAYLEY, nella quale si prende per punto di partenza la posizione e natura delle tangenti (assintoti) nei tre punti all'infinito della curva.

Per la letteratura sulla classificazione delle cubiche citeremo NEWTON (*Op. cit.*), EULER (*Introd.*, 1748), CHASLES (*Aperçu hist.*), PLÜCKER (*System der anal. Geom.*), CAYLEY (*Transact. of Cambridge*, ecc., XI, 1865), BELLAVITIS (*Società italiana delle scienze*, Modena, 1851), MÖBIUS (*Abh. der Sächs. Gesellschaft*, 1851), DUREGE (*Crelle*, LXXV, LXXVI), ecc.

§ 4. — LA FORMA CUBICA TERNARIA. SUOI INVARIANTI E COVARIANTI.

Sia la cubica ternaria espressa simbolicamente da $f = a_x{}^3 = b_x{}^3 = \ldots$, ovvero, mediante i coefficienti effettivi, da $f = \Sigma\, a_{ihk}\, x_i\, x_h\, x_k$.

Dalle tre formazioni invariantive Δ, Q, R della cubica binaria, col principio di traslazione (vedi

Cap. III) si ottengono tre formazioni invariantive per la cubica ternaria, cioè

$$\Theta = (a\,b\,u)^2\,a_x\,b_x$$
$$Q_1 = (a\,b\,u)^2\,(c\,a\,u)\,c_x{}^2\,b_x$$
$$F = (a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(a\,c\,u)\,(b\,d\,u).$$

La relazione $F = 0$ è la equazione di f in coordinate di rette (equazione tangenziale della cubica).

L'equazione $\Theta = 0$ dà per $x =$ costante l'equazione tangenziale della conica polare di x; e per $u =$ costante dà l'equazione della POLOCONICA *della retta u* (v. § 1).

L'equazione $Q_1 = 0$ dà per ogni retta u, una cubica luogo di punti x di cui le rette polari incontrano la retta u in un punto che è CONIUGATO (v. Cap. III) *di x rispetto alla poloconica di u.*

La cubica $Q_1 = 0$ incontra la retta u in tre punti che insieme con quelli in cui u incontra la cubica $f = 0$, formano tre coppie di una medesima involuzione di cui i punti doppi sono quelli in cui u incontra la propria poloconica.

Ponendo

$$f_{ij} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$$
$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

si hanno le formole

$$F = -2 \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ponendo simbolicamente:

$$\Theta = \Theta^2{}_x\, u^2{}_\vartheta = \Theta'^2{}_x\, u^2{}_{\vartheta'}$$

si ha anche

$$Q_1 = u^2{}_\vartheta (c\ \Theta\ u)\, c^2{}_x\, \Theta_x.$$

Il sistema completo di una cubica ternaria risulta di 34 forme.

Altre importanti formazioni invariantive della cubica sono:

l' Hessiana

$$H = (a\ b\ c)^2\, a_x\, b_x\, c_x$$
$$= \Theta^2{}_x\, c^2{}_\vartheta\, c_x\,;$$

la Cayleyana

$$s = (a\ b\ c)\,(a\ b\ u)\,(a\ c\ u)\,(b\ c\ u)$$
$$= (\Theta\ c\ u)^2\, c_\vartheta\, u_\vartheta\,;$$

il contravariante

$$t = (a\ b\ d)\,(a\ b\ u)\,(a\ e\ u)\,(b\ f\ u)\,(d\ e\ f)^2$$
$$= \Theta^2{}_s\, u_s\, u^2{}_\vartheta$$

e i due invarianti

$$S = (a\ b\ c)\,(a\ b\ d)\,(a\ c\ d)\,(b\ c\ d)$$
$$= \Theta^2{}_{\vartheta'}\, \Theta'^2{}_\vartheta$$
$$= a^3{}_s$$
$$= \frac{2}{3} \Big\{ (a_{122}a_{133} - a^2{}_{123})^2 + (a_{222}a_{333} - a^2{}_{223})(a_{111}a_{133} - a^2{}_{113}) +$$

$$+ (a_{223}\, a_{333} - a^2_{233})\, (a_{111}\, a_{122} - a^2_{112}) +$$
$$+ (a_{222}\, a_{333} + a_{223}\, a_{233})\, (a_{112} a_{113} - a_{111}\, a_{123}) +$$
$$+ (a_{122} a_{333} + a_{223} a_{133} - 2 a_{123} a_{233})(a_{112} a_{123} - a_{113} a_{122}) +$$
$$+ (a_{122} a_{233} + a_{133} a_{222} - 2 a_{123} a_{223})(a_{113} a_{123} - a_{112} a_{133}) \Big\}$$

$$T = (a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,e)\,(b\,c f)\,(d\,e\,f)^2$$
$$= a^3 t.$$

Non esistono altri invarianti fondamentali oltre i due S e T, cioè *ogni altro è sempre una funzione razionale intera di quei due.*

Se si pone f sotto la forma canonica (v. § 3).

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\, m\, x_1\, x_2\, x_3$$

si ha:

$$t = -2\,(1 - 10\, m^3)\,(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) -$$
$$+ 2\,(30\, m^2 + 24\, m^5)\, u_1\, u_2\, u_3$$
$$S = 24\, m\,(m^3 - 1)$$
$$T = 6\,(8\, m^6 + 20\, m^3 - 1)$$

mentre la equazione di f in coordinate tangenziali diventa:

$$-\frac{1}{2} F = u_1^6 + u_2^6 + u_3^6 - (2 + 32\, m^3)\,(u_1^3 u_2^3 +$$
$$+ u_2^3 u_3^3 + u_3^3 u_1^3) - 24\, m^2\, u_1\, u_2 u_3\, (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) -$$
$$- (24\, m + 48\, m^4)\, u_1^2\, u_2^2\, u_3^2 = 0$$

(per le espressioni di H e C vedi il § 3).

La condizione $S = 0$ *esprime che la Hessiana di f si decompone in tre rette; la Cayleyana si compone allora dei tre punti doppi della Hessiana, e il triangolo formato da questi è triangolo polare rispetto a tutte le coniche polari della curva primitiva.*

Se $S=0$, la curva di 3.° ordine è detta *equianarmonica; in tal caso formano un gruppo equianarmonico le quattro tangenti condotte da un punto della curva alla curva stessa* (v. § 1).

Se $T=0$ la curva di 3.° ordine è detta *armonica; in tal caso formano un gruppo armonico le quattro sopraindicate tangenti.*

Se è $T=0$, la Hessiana della Hessiana si confonde colla curva primitiva, e la Cayleyana della Hessiana si confonde con $t=0$.

Il discriminante della curva di 3.° ordine, cioè la funzione che eguagliata a zero esprime la condizione del punto doppio, è

$$T^2-\frac{1}{6}S^3.$$

Per il caso in cui la f sia data sotto la sopraindicata forma canonica, il discriminante è

$$(1+8m^3)^3.$$

Chiamando a_{ijk} e h_{ijk} i coefficienti di f e dell'Hessiana H, la espressione effettiva del discriminante è

$$R=\begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{113} & a_{112} \\ a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{213} & a_{212} \\ a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{313} & a_{312} \\ h_{111} & h_{122} & h_{133} & h_{123} & h_{113} & h_{112} \\ h_{211} & h_{222} & h_{233} & h_{223} & h_{213} & h_{212} \\ h_{311} & h_{322} & h_{333} & h_{323} & h_{313} & h_{312} \end{vmatrix}.$$

La espressione $\frac{S^3}{T^2}$ *è invariante assoluto per la cubica.*

Posta la cubica sotto la solita forma canonica, si ha

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{384\, m^3 (m^3 - 1)^3}{(8\, m^6 + 20\, m^3 - 1)^2}.$$

Chiamando α *il rapporto anarmonico (costante) delle quattro tangenti condotte da un punto della cubica alla cubica stessa, si ha la rimarchevole relazione*

$$\frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha)^2}.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una cubica possieda una cuspide sono $S = 0$, $T = 0$.

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una cubica si decomponga in una conica e in una retta sono date dall'annullarsi identico di

$$T s - S t;$$

se poi la retta deve essere tangente alla conica, allora le condizioni sono espresse dall'annullarsi identico di t.

Per la decomposizione della cubica in tre rette, è necessario e sufficiente che f *e* H *sieno proporzionali, cioè che la forma*

$$(a\, h\, u)\, a^2_x\, h^2_x$$

sia identicamente nulla.

Le condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di f *in tre rette concorrenti in un punto, sono date dall'annullarsi identico di* H.

L'annullarsi identico di F dà le condizioni perchè f si decomponga in una retta semplice e in una doppia, e finalmente l'annullarsi identico di Θ dà le condizioni perchè f si riduca ad una retta tripla.

Se la cubica ha un punto doppio, le tangenti in questo, tagliano l'unica linea d'inflessione in due punti che sono rappresentati dall' Hessiano Δ della binaria cubica che rappresenta i tre punti di flesso. Il covariante Q di tale binaria cubica rappresenta allora i tre punti in cui le tre rette armoniche dei tre flessi (v. § 1) *tagliano la linea d'inflessione.*

Due cubiche $a_x{}^3 = 0$, $\alpha_x{}^3 = 0$ hanno gli stessi flessi se è zero identicamente il contravariante simultaneo $(a\,\alpha\,u)^3 = 0$.

Quindi supposto che la seconda cubica è l'Hessiana H della prima si ha:

Il contravariante $(a\,h\,u)^3$ è identicamente zero.

Nello studio della forma ternaria cubica è interessante lo studio della binaria biquadratica

$$G(\lambda_1\,\lambda_2) = \lambda_1{}^4 - S\,\lambda_1{}^2\,\lambda_2{}^2 - \frac{4}{3}\,T\,\lambda_1\,\lambda_2{}^3 - \frac{1}{12}\,S^2\,\lambda_2{}^4$$

la quale si presenta nella formazione dell' Hessiano di una cubica qualunque del fascio sizigetico (v. § 1).

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H.$$

La equazione delle 12 rette inflessionali è:

$$G(H, -f) = 0.$$

L'invariante i della biquadratica G è identicamente zero.

L'invariante j di G è eguale a $\frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right)$, *cioè è eguale, a meno di un fattore, al discriminante di f.*

L' Hessiano di G, differisce solo per un fattore numerico dall'invariante $S_{\lambda_1\lambda_2}$ *di una curva del fascio sizigetico.*

Il covariante sestico di G, differisce solo per un fattore numerico, dall'invariante $T_{\lambda_1\lambda_2}$ *di una curva del fascio sizigetico.*

Delle cubiche ternarie si occuparono HESSE, ARONHOLD (*Crelle*, XXXIX, LV), CAYLEY (*Mem. upon quantics*, 1856; *Phil. Trans.*, 1861; *Am. Journ.*, IV), GORDAN (*Math. Ann.*, I), CLEBSCH-GORDAN (*Math. Ann.*, I, VI, VIII), GUNDELFINGER (*Math. Ann.*, IV, V, VIII), HARNACK (*Math. Ann.*, IX), MERTENS (*Wien. Berich.*, 1888), DINGELDEY (*Math. Ann.*, XXXI), MAISANO (*Rendic. Palermo*, IV), GERBALDI (*Atti Torino*, XV, 1880).

Per una esposizione dettagliata si vegga la *Geometria* di CLEBSCH-LINDEMANN, della quale ci siamo serviti in questo riassunto.

Analoghe ricerche si trovano anche nelle opere di SALMON (*Higher plan. curv.* e *Modern. algeb.* trad. da FIEDLER in tedesco. Leipzig, 1863-1882).

CAPITOLO VIII.

Le quartiche piane.

§ 1. — GENERALITÀ. GENERAZIONI DELLE QUARTICHE. TANGENTI DOPPIE. CONICHE E CUBICHE DI CONTATTO.

Dalle formole di PLÜCKER risultano le seguenti dieci possibili combinazioni per i numeri caratteristici di una quartica piana:

n	d	r	ν	δ	ι	p
4	0	0	12	28	24	3
4	1	0	10	16	18	2
4	0	1	9	10	16	2
4	2	0	8	8	12	1
4	1	1	7	4	10	1

n	d	r	ν	δ	ι	p
4	0	2	6	1	8	1
4	3	0	6	4	6	0
4	2	1	5	2	4	0
4	1	2	4	1	2	0
4	0	3	3	1	0	0

Si abbiano due fasci proiettivi di coniche, i cui punti base sieno distinti; il luogo dei punti d'intersezione delle coniche corrispondenti è una curva generale di 4.° ordine che passa per gli 8 punti base dei due fasci.

I due fasci di coniche sieno dati da

$$U + \lambda V = 0$$
$$U' + \mu V' = 0$$

dove $U = 0$, $V = 0$, $U' = 0$, $V' = 0$ rappresentino le equazioni di quattro coniche, e fra μ e λ sussista una relazione bilineare del tipo

$$a \lambda \mu + b \lambda + c \mu + d = 0.$$

Eliminando λ, μ fra queste tre equazioni si ha la equazione della curva del 4.° ordine.

Non si perde alcuna generalità, se si suppone $\mu = \lambda$, *e* $V' = V$; *cioè:*

L'equazione di ogni curva del 4.° ordine può sempre porsi sotto la forma

$$U\,W = V^2$$

dove $U = 0$, $W = 0$, $V = 0$ *rappresentano tre coniche non passanti tutte tre per un medesimo punto.*

Per ridurre l'equazione della quartica a questa forma basta assumere per coniche U, W due *coniche di contatto*, cioè coniche che toccano in quattro punti la quartica.

Propriamente sussiste il teorema:

Esistono 63 sistemi di coniche di contatto; ogni sistema è costituito di infinite coniche tali che per gli otto punti di contatto di due coniche di uno stesso sistema passa una medesima altra conica. Nell'equazione superiormente scritta, tale conica è rappresentata da $V = 0$.

In ciascuno dei 63 sistemi di coniche di contatto figurano 6 coppie di tangenti doppie

Se $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ sono le equazioni di quattro tangenti doppie di due di tali coppie appartenenti allo stesso sistema, *l'equazione della quartica potrà sempre porsi sotto la forma*

$$T_1\,T_2\,T_3\,T_4 = S^2$$

dove le T *sono espressione lineari e la* S *è espressione quadratica.*

Messa l'equazione della quartica sotto la forma

$$U\,W = V^2,$$

essa può considerarsi come l'inviluppo del sistema di coniche:

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0.$$

Una quartica piana può anche essere generata mediante due fasci proiettivi, uno di rette e l'altro di cubiche (v. MILINOWSKI, *Schlömilch Zeitsch.* XXIII, 1878).

Dalla equazione $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$ risulta che *si possono raggruppare a 4 a 4 le tangenti doppie, in modo che gli otto punti di contatto stiano su di una medesima conica. Di tali coniche ve ne sono 315.*

L'equazione di una quartica può anche porsi sotto la forma

$$T_1 F_3 = \Omega^2$$

dove $T_1 = 0$ *è l'equazione di una tangente doppia,* $F_3 = 0$ *è l'equazione di una cubica, la quale tocca in 6 punti la quartica, e che perciò si chiama cubica di contatto, e* $\Omega = 0$ *è l'equazione di una conica.*

Esistono 64 sistemi di cubiche di contatto triplamente infiniti. Questi 64 sistemi si distinguono in due specie; ve ne sono 28 di una specie e 36 dell'altra. Quelli della prima specie hanno la proprietà che ad ognuno di essi corrisponde una delle 28 tangenti doppie in modo che i sei punti di contatto, insieme ai due della tangente doppia stanno su di una stessa conica. Quelli della seconda specie non hanno invece questa proprietà; essi contengono un sistema semplicemente infinito di cubiche degenerate in una tangente alla quartica e

in una conica passante per i due punti in cui la tangente incontra ancora la quartica, e tangente a questa in altri tre punti.

Ponendo l'equazione della quartica sotto la forma $T_1 F_3 = \Omega^2$, *la cubica* $F_3 = 0$ *è una cubica di un sistema di 1.ª specie.*

Le cubiche di contatto di 1.ª o 2.ª specie hanno sempre la proprietà che per i 12 punti di contatto di due cubiche dello stesso sistema passa una nuova cubica.

In ogni sistema di cubiche di contatto esistono 64 cubiche che hanno colla quartica un contatto di 3.° ordine in tre punti. Di tali cubiche ve ne sono dunque $4^6 = 4096$.

Esistono 728 sistemi di cubiche aventi un contatto di 2.° ordine colla quartica in quattro punti. Questi 728 sistemi si scindono in 364 coppie in maniera, che i punti di contatto di una cubica di un sistema, e quelli di una cubica del sistema ad esso accoppiato, stanno su di una medesima conica.

Una curva generale di 4.° ordine può generarsi anche nel seguente modo indicato da HESSE (*Crelle*, XLIX).

Si abbia una rete di quadriche

$$x_1 \sum_1^4 \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum_1^4 \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum_1^4 \gamma_{ik} z_i z_k = 0$$

dove le $x_1 x_2 x_3$ sono i parametri omogenei della rete, le $z_1 z_2 z_3 z_4$ sono le coordinate di punti dello spazio, e $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$. *I vertici dei* CONI *contenuti in questa rete sono situati su di una curva storta di 6.° ordine.* Interpretando

poi le x come le coordinate di punti del piano, *ai punti della indicata sestica storta (vertici dei coni), corrispondono nel piano i punti di una curva piana generale di 4.° ordine, la cui equazione si ottiene ponendo eguale a zero il discriminante di una quadrica della rete.*

Ponendo

$$\pi_{ik} = x_1 \alpha_{ik} + x_2 \beta_{ik} + x_3 \gamma_{ik}$$

L'equazione della quartica è

$$C_4 = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Ponendo l'equazione della quartica sotto questa forma, la equazione

$$\Phi_{uu} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{14} & u_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & u_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & u_3 \\ \pi_{41} & \dots & \pi_{44} & u_4 \\ u_1 & \dots & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

è quella di una cubica di contatto di un sistema di 2.ª specie, e l'equazione

$$\Phi_{uv} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{14} & u_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \dots & \pi_{44} & u_4 \\ v_1 & \dots & v_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

è quella della cubica che passa per i punti di contatto di $\Phi_{uu} = 0$ *e* $\Phi_{vv} = 0$.

Ponendo la equazione della rete di quadriche simbolicamente sotto la forma

$$0 = a_x \alpha^2_z = b_x \beta^2_z = \dots \quad \begin{pmatrix} \text{le } x \text{ sono variab. ternarie} \\ \text{le } z \text{ sono variab. quatern.} \end{pmatrix}$$

la equazione di C_4 *è*

$$(\alpha \beta \gamma \delta)^2 a_x b_x c_x d_x = 0$$

e quelle delle cubiche Φ_{uu}, Φ_{uv} *sono*

$$\Phi_{uu} = (\alpha \beta \gamma u)^2 a_x b_x c_x = 0$$

$$\Phi_{uv} = (\alpha \beta \gamma u)(\alpha \beta \gamma v) a_x b_x c_x = 0.$$

È interessante notare ancora che *si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra le rette che congiungono a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche e le 28 tangenti doppie.*

Un altro modo di generazione di una curva generale di quart'ordine è il seguente di Geiser (*Math. Ann.* I).

Se da un punto P conduciamo il cono tangente ad una superficie cubica, abbiamo un cono di 6.° ordine; ma se il punto sta sulla superficie, si ha un cono di quart'ordine, insieme al piano tangente in quel punto P contato due volte. Segando questo cono con un piano, si ha una curva generale di 4.° ordine, che ha per tangente doppia la retta intersezione del piano segante col piano tangente in P.

Le sezioni piane della superficie cubica si proiettano in cubiche di contatto alla quartica; si ha propriamente il sistema triplamente infinito di cubiche di contatto di 1.ª specie che è correlato colla tangente doppia risultante dal piano tangente in P. Le 27 rette della superficie cubica si proiettano nelle altre 27 tangenti doppie della quartica piana.

Per lo studio della configurazione delle tangenti doppie della quartica piana è utile adoperare per esse una notazione o una rappresentazione da cui possa facilmente risultare la configurazione richiesta.

Una delle rappresentazioni adoperate e che può essere suggerita dalla *figura di Hesse* sopra indicata è *quella mediante le 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali.*

Un'altra rappresentazione è *quella mediante le cosiddette caratteristiche dispari di genere 3* (vedi vol I, pag. 465).

Ogni tangente doppia può rappresentarsi col simbolo

$$\begin{pmatrix} i & j & h \\ i_1 & j_1 & h_1 \end{pmatrix}$$

dove i, j, h, i_1, j_1, h_1 *sono numeri 0 o 1, e la somma*

$$i\, i_1 + j j_1 + h\, h_1$$

è dispari.

Secondo la prima rappresentazione un gruppo di quattro tangenti doppie pei cui punti di contatto passa una conica è rappresentato o dai quattro lati di un quadrilatero (210 volte) ovvero da quattro

rette due delle quali non hanno mai in comune uno degli otto punti (105 volte).

Secondo la seconda rappresentazione un siffatto gruppo è invece rappresentato da quattro caratteristiche dispari tali che le somme degli elementi che occupano i medesimi posti sieno tutti pari.

Partendo da questi principi si può esaminare quante terne, quaterne, ecc. di tangenti doppie, esistono che sieno dotate di proprietà speciali, p. es. terne i cui 6 punti di contatto non stanno su di una conica, quaterne dei cui 8 punti di contatto solo 6 (ovvero mai 6) stanno su di una conica, ecc.

Fra i gruppi di SEI tangenti doppie sono da notarsi quelli studiati da HESSE e STEINER; *esistono 1008 gruppi di sei tangenti doppie tali che per i punti di contatto di esse passa una curva* PROPRIA *del 3.° ordine.*

Nella prima delle rappresentazioni suindicate tali gruppi sono rappresentati da tre figure diverse, cioè: a) i lati di due triangoli che hanno per vertici 6 degli 8 punti; b) la retta che congiunge due punti, e le rette che congiungono un altro punto agli altri cinque; c) le rette che congiungono un punto a tre altri, e un altro punto ai tre rimanenti.

Esistono poi 5040 gruppi di 6 tangenti doppie tali che i 12 punti di contatto si dividono in $6+6$, in modo che per ogni gruppo dei 6 punti passa una conica.

Le 6 tangenti doppie di uno dei 1008 gruppi della prima specie toccano la medesima conica; mentre ciascuno dei 5040 gruppi di 2.ª specie, si

divide in tre coppie di tangenti doppie in modo che i tre punti d'incontro delle tangenti di una coppia stanno in linea retta.

Fra i gruppi di SETTE tangenti doppie ve ne sono 288 i quali si chiamano i *sistemi completi* di ARONHOLD; essi sono formati di sette tangenti doppie tali che MAI i sei punti di contatto di tre di esse stanno su di una conica.

Tali sistemi completi sono rappresentati dalle sette rette che congiungono uno degli otto punti agli altri sette; ovvero dalle rette costituenti i tre lati di un triangolo e le quattro congiungenti uno dei rimanenti punti cogli altri quattro.

Esistono 72 sistemi di ARONHOLD *contenenti una data tangente doppia; e ne esistono 16 contenenti due date tangenti doppie.*

Mediante le sette tangenti doppie di un sistema di ARONHOLD *si possono con costruzioni lineari, costruire tutte le altre.*

Viceversa: *Date nel piano sette rette arbitrarie, si può sempre costruire una quartica che abbia per tangenti doppie le sette rette date, le quali formino rispetto alla quartica un sistema completo di Aronhold* (ARONHOLD, *Berl. Monatsb.*, 1864; SALMON-FIEDLER, *Höh. Curv.*, § 264 e seg., FROBENIUS, *Crelle*, IC).

Fra le varie forme che può avere una quartica è interessante quella cosiddetta di PLÜCKER formata di 4 ovali esterne l'una all'altra. Ad ognuna di queste ovali corrisponde una tangente doppia che la tocca in due punti.

Tale quartica ha tutte le TANGENTI *doppie reali,*

Le curve di 4.° ordine furono studiate da Plücker (*Alg. Curv.*), da Hesse (*Crelle*, IL, LV, LIX), Steiner (*Id.*, IL). Cayley (*Id.*, LXVIII), Clebsch (*Id.*, LXIII), Geiser (*Idem*, LXXIII, *Math. Ann.*, I), Zeuthen (*Math. Ann.*, VII, VIII) il quale ultimo si occupò molto della classificazione delle quartiche.

La determinazione della curva che passa per i 56 punti di contatto delle tangenti doppie fu fatta da Hesse (*Crelle*, XXXVI, XL, XLI), da Salmon (*Quart. Journ.*, III), Cayley (*Phil. Trans.*, 1859, 1861) e Dersch (*Math. Ann.*, VII).

Fra i lavori sulla determinazione delle tangenti doppie della quartica è anche da notarsi quello di Aeschlimann (*Diss.*, Zürich, 1880).

Le curve di 4.° ordine sono state anche largamente studiate dal punto di vista della teoria delle funzioni abeliane di genere 3, teoria colla quale esse hanno i più intimi rapporti. Lavori su ciò sono quelli di Riemann, Clebsch, Weber (vedi la *Geom.* di Clebsch-Lindemann).

Altri studi sulla configurazione delle 28 tangenti doppie sono quelli di Aronhold (cit.), Klein (*Math. Ann.*, X), Noether (*Math. Ann.*, XV, XLVI), Frobenius (*Crelle*, IC), Weber (*Math. Ann.*, XXIII), Pascal (*Rend. Lincei*, 1892-93) ecc.

Lo studio della configurazione delle tangenti doppie si riduce a quello delle cosiddette *caratteristiche* (v. Pascal, *Ann. di mat.* XX).

Sulla configurazione dei 24 flessi della quartica generale conosciamo molto poco. Una dissertazione di Grassmann (*Berlin*, 1875) a questo proposito (in cui si volea dimostrare che la conica passante

per cinque flessi, passa sempre per un sesto) è erronea (v. KLEIN, *Math. Ann.* X); dell'equazione di 24.° grado da cui dipendono i flessi si occupò GERBALDI (*Rend.* Palermo, VII).

§ 2. — QUARTICHE CON PUNTI SINGOLARI.

Si ponga l'equazione della quartica sotto la forma $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$. Se dei 6 punti d'incontro delle rette $T = 0$, uno, due, tre stanno sulla conica $S = 0$, si ha la quartica con uno, due, tre punti doppi.

Si ponga l'equazione della quartica sotto l'altra forma $U W = V^2$. Se le tre coniche

$$U = 0 \quad W = 0 \quad W = 0$$

hanno uno, due, tre punti comuni, si hanno quartiche con uno, due, tre punti doppi.

Una quartica con un punto doppio ha solo 16 tangenti doppie. Nella rappresentazione di GEISER (v. § 1) essa si otterrebbe ponendo il centro di proiezione P su di una delle rette p della superficie cubica; allora l'intersezione di questa retta col piano segante è il punto doppio; le proiezioni delle 16 rette che nella superficie cubica *non* tagliano la retta p, danno le 16 tangenti doppie.

Nella rappresentazione di HESSE (v. § 1) essa si otterrebbe invece facendo coincidere due degli 8 punti fondamentali della rete di quadriche.

La configurazione delle tangenti doppie si può studiare nello stesso modo con cui si studia la

configurazione generale, immaginando che due degli otto punti fondamentali coincidano, e quindi rappresentando le 16 tangenti doppie mediante le congiungenti a due due *sei* punti fondamentali, e mediante un'altra retta passante per un settimo punto. Le congiungenti questo settimo punto cogli altri sei, corrispondono alle sei rette tangenti alla curva condotte dal punto doppio.

Le 16 tangenti doppie si possono in 60 modi riunire in gruppi di quattro, in modo che per gli otto punti di contatto delle quattro tangenti di un gruppo, passi una conica.

Delle quartiche con un punto doppio si occuparono Brioschi, Cremona (*Math. Ann.*, IV), Brill (*Crelle*, LXV, *Math. Ann.*, VI), ecc.

Fra le quartiche *con due punti doppi* è stata studiata specialmente quella in cui tali due punti doppi sono i *punti ciclici immaginari all'infinito.* Una tal curva si chiama *curva bicircolare di quart'ordine* (Casey, *R. Irish Trans.*, 1871, XXIV).

In una quartica con due punti doppi, da ciascuno di questi possono condursi quattro tangenti alla curva; il rapporto anarmonico delle due quaterne di raggi così formate è il medesimo.

Le 16 intersezioni delle prime 4 tangenti colle seconde 4 tangenti stanno a quattro a quattro su coniche le quali passano per i due punti doppi.

La curva bicircolare può essere considerata come l'inviluppo di un cerchio di raggio variabile, il cui centro si muove su di una conica e che si mantiene sempre ortogonale ad un altro dato cerchio. Se la conica è una parabola, allora la curva

bicircolare si scinde nella retta all' infinito e in una curva di 3.° ordine.

Delle curve di 4.° ordine con due cuspidi sono caso particolare quelle chiamate le *curve Cartesiane*, in cui le due cuspidi sono i due punti ciclici immaginari all'infinito.

Le curve cartesiane hanno la proprietà: esistono su di una retta sempre tre punti A, B, C fissi, tali, che chiamando ρ, ρ' ρ'' *le distanze di un punto della curva da essi, sussistono le relazioni*

$$l\ \rho + m\,\rho' = c$$

$$l\ \rho + n\ \rho'' = c'$$

$$m\,\rho' - n\ \rho'' = c''$$

dove l, m, n, c, c', c'' *sono costanti.* Tali tre punti si chiamano FUOCHI; se essi sono tutti reali si ha una curva detta *ovale di Cartesio*; se uno solo è reale si ha una curva diversa da quella studiata da CARTESIO.

L'equazione di una curva cartesiana è

$$S^2 = k^3\,L$$

dove $S = 0$ *è l'equazione di un cerchio,* $L = 0$ *quella di una retta, e* k *è una costante. La retta* $L = 0$ *è allora una tangente doppia della curva.*

È costante la somma delle distanze da un foco, dei quattro punti in cui una trasversale taglia una curva cartesiana.

Casi particolari della curva cartesiana sono la *lumaca di Pascal*, e la *cardioide*, di cui la prima ha, oltre le due cuspidi nei due punti ciclici, an-

cora un punto doppio, e nella seconda questo punto doppio è degenerato di nuovo in una terza cuspide.

L'equazione di una curva di 4.° ordine con tre punti doppi, si può porre sotto la forma seguente:

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{34} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + \\ + 2 a_{31} x_2^2 x_3 x_1 + 2 a_{12} x_3^2 x_1 x_2 = 0$$

ponendo nei tre punti doppi i vertici del triangolo fondamentale delle coordinate omogenee.

Dividendo il primo membro dell'equazione per $x_1^2 x_2^2 x_3^2$, l'equazione precedente può porsi sotto una forma da cui appare che essa può ricavarsi da quella di una conica ponendo, in luogo di ciascuna coordinata la sua *inversa.*

Questa osservazione può utilmente servire allo studio della curva.

In una curva di 4.° ordine a tre punti doppi, le sei tangenti alla curva in questi punti, sono tangenti ad una medesima conica.

Le sei tangenti che dai tre punti doppi possono condursi alla curva, sono anch'esse tangenti ad una stessa conica.

Gli otto punti di contatto delle 4 tangenti doppie di una siffatta curva stanno su di una stessa conica.

L'equazione di una curva di 4.° ordine con tre cuspidi può sempre porsi sotto la forma

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$$

e le tre tangenti cuspidali sono allora date dalle equazioni

$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_3 = x_1$$

e passano quindi per un medesimo punto.

Le curve di 4.° ordine con tre punti doppi furono specialmente studiate da Brill (*Math. Ann.*, XII) e Bretschneider (*Diss.*, Erlangen, 1875).

§ 3. — La forma quartica ternaria.

Posta simbolicamente la quartica ternaria sotto la forma

$$f = a^4{}_x = b^4{}_x = c^4{}_x = \ldots$$

la prima forma invariantiva che si presenta è il contravariante:

$$\sigma = (a\, b\, u)^4.$$

Il contravariante σ *eguagliato a zero rappresenta, in coordinate tangenziali, una curva le cui tangenti tagliano la curva* $f = 0$ *in quattro punti formanti un gruppo equianarmonico.*

Un altro contravariante è

$$(a\, b\, u)^2\, (b\, c\, u)^2\, (c\, a\, u)^2,$$

il quale, eguagliato a zero, rappresenta una curva le cui tangenti tagliano la quartica data in quattro punti formanti un gruppo armonico.

Il più semplice invariante è quello espresso simbolicamente da

$$A = (a\,b\,c)^4$$

di 3.° grado nei coefficienti.

Un altro invariante è B espresso mediante i coefficienti effettivi colla formola:

$$B = a_1^2 b_2^2 c_3^2 d_2 d_3 e_3 e_1 f_1 f_2 \begin{vmatrix} a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2 \\ b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_2 b_3, b_3 b_1, b_1 b_2 \\ c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_2 c_3, c_3 c_1, c_1 c_2 \\ d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_2 d_3, d_3 d_1, d_1 d_2 \\ e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_2 e_3, e_3 e_1, e_1 e_2 \\ f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_2 f_3, f_3 f_1, f_1 f_2 \end{vmatrix}$$

di 6.° grado nei coefficienti. Questo invariante si ottiene eliminando col metodo dialitico le x, fra le sei derivate seconde di f.

L'invariante B ha speciale relazione colla esprimibilità di f mediante una combinazione lineare delle quarte potenze di forme lineari.

Ogni quartica ternaria f può sempre rappresentarsi mediante le quarte potenze di SEI *forme lineari; se poi $B = 0$ allora la f si potrà rappresentare mediante le quarte potenze di* CINQUE *forme lineari; e se infine sono zero tutti i minori di 5.° ordine del determinante B, allora f si potrà rappresentare mediante le quarte potenze di sole* QUATTRO *forme lineari* (v. REYE, *Crelle*, LXXVIII; CLEBSCH, *Id.*, LIX; LÜROTH, *Math. Ann.*, I).

Non crediamo utile dilungarci sulla espressione

delle altre conosciute forme invariantive della quartica ternaria e solo aggiungeremo le seguenti notizie:

Il Gordan considerò il sistema completo d'una speciale quartica e trovò 54 forme (*Math. Ann.*, XVII, XX); il Maisano considerò tutte le forme sino a quelle di 5.° grado nei coefficienti (*Giorn. di Batt.*, XIX), e infine altre ricerche sullo stesso argomento si trovano nel trattato di Salmon-Fiedler (*Höher. Curven*, § 293 e seg.), in Scherrer (*Ann. di mat.*, X) e in Maisano (*Rendic. Palermo*, I).

CAPITOLO IX.

Teoria generale delle superficie e curve gobbe algebriche.

§ 1. — Generalità. — Superficie sviluppabili e gobbe. — Intersezioni di superficie. — Geometria sulle superficie algebriche.

Il luogo di punti rappresentato analiticamente da un'equazione algebrica di grado n fra le tre coordinate cartesiane di un punto dello spazio, si chiama *una superficie di ordine n.*

Superficie di 1.° ordine è il piano.

Ogni retta dello spazio taglia la superficie di ordine n, in n punti (reali o immaginari), e ogni piano la taglia secondo una curva di ordine n.

L'equazione di una superficie di ordine n contiene omogeneamente

$$\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)+1=\binom{n+3}{3}=N(n)+1$$

coefficienti.

Retta tangente ad una superficie è la posizione limite di una retta la quale passa per due punti della superficie, quando tali punti restando sempre sulla superficie, si avvicinano indefinitivamente *(contatto bipunto)*.

Retta osculatrice ad una superficie è la posizione limite di una retta, la quale passa per tre o più punti di una superficie, quando tali punti si avvicinano indefinitamente *(contatto tripunto*, *quadripunto*, etc.).

Tutte le rette tangenti ad una superficie in un punto giacciono in generale in un piano, *che si chiama piano tangente alla superficie in quel punto.*

Il piano tangente ad una superficie in un punto P, *taglia la superficie secondo una curva avente un punto doppio in P.* Se questo è una cuspide il piano tangente si dice *stazionario.*

Le due tangenti nel punto doppio sono due rette osculatrici alla superficie. Secondochè tali tangenti sono reali, coincidenti, o immaginarie, il punto della superficie si dice *iperbolico, parabolico*, *ellittico.*

I punti parabolici di una superficie formano una curva che si chiama *curva parabolica.*

Il numero dei piani tangenti che si possono condurre ad una superficie da una retta situata comunque nello spazio si dice *classe della superficie.*

Una superficie di ordine n è in generale di classe n $(n-1)^2$, *se la superficie non contiene alcuna singolarità.*

Si abbia l'equazione della superficie in coordi-

nate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, e si supponga ordinato il primo membro secondo le potenze di x_4, cioè l'equazione posta sotto la forma

$$u_0\, x_4^n + u_1\, x_4^{n-1} + u_2\, x_4^{n-2} + \ldots = 0$$

essendo $u_0, u_1, u_2, \ldots$ funzioni omogenee intere di grado 0, 1, 2,... in $x_1\; x_2\; x_3$.

Se il punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ è un punto della superficie, sarà $u_0 = 0$, *e il piano tangente in tal punto sarà rappresentato da* $u_1 = 0$

Conducendo un piano parallelo al piano tangente e infinitamente vicino ad esso, esso taglia la superficie secondo una curva, la quale, trascurando infinitesimi di ordine superiore, può approssimativamente considerarsi come una conica (indicatrice di Dupin); *il punto della superficie è ellittico, parabolico, o iperbolico, secondochè tale conica è ellisse, parabola, iperbole.*

Ponendo l'equazione della superficie sotto la forma $z = f(x\,y)$, il punto $(x\,y\,z)$ della superficie sarà ellittico, parabolico, iperbolico, secondochè è

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

L'intersezione o una parte dell'intersezione di due superficie *algebriche* si dice *curva gobba (o storta) algebrica.*

Una curva gobba (o storta) algebrica è tagliata da un piano qualunque dello spazio in un numero fisso di punti (reali, coincidenti, o immaginari). Tal numero si dice *ordine della curva gobba.*

Il minimo ordine per una curva gobba è il 3.

Si noti che *non si può a tutto rigore*, come per le curve piane, considerare sempre l'assieme di due curve gobbe di ordini d, d' come la degenerazione di una curva gobba di ordine $d + d'$; giacchè se una curva gobba di ordine $d + d'$ situata su di una superficie algebrica, si decompone in due curve di ordini d e d', queste avranno in generale dei punti d'intersezione, il che non avverrà in generale se le due curve date sono assegnate comunque nello spazio.

La posizione limite di una retta che passa per due punti della curva quando questi si avvicinano indefinitivamente è al solito la *retta tangente alla curva*, e la posizione limite di un piano che passa per tre punti della curva quando questi si avvicinano indefinitamente è *il piano osculatore alla curva.*

Classe di una curva gobba è il numero delle sue rette tangenti incontrate da una retta arbitraria dello spazio, ovvero il numero dei piani che passano per una retta fissa arbitraria dello spazio e per tangenti della curva gobba.

Una superficie generata dal movimento di una retta è una *rigata*. Queste si distinguono in *sviluppabili* e *gobbe.*

Una superficie *sviluppabile* è il luogo delle tangenti di una curva gobba. La sviluppabile è dunque generata dal movimento di una retta due posizioni consecutive della quale sono in un medesimo piano.

Generatrici della sviluppabile sono le tangenti della curva gobba, la quale a sua volta si dice

spigolo di regresso o curva cuspidale della sviluppabile.

L'ordine di una superficie sviluppabile è eguale alla classe della curva gobba.

Questo numero si suol chiamare *rango* del sistema costituito dalla curva gobba e dalla sua sviluppabile.

Un piano osculatore della curva gobba è un piano tangente alla superficie sviluppabile, la quale è perciò l'inviluppo dei piani osculatori della curva gobba. Perciò essa si suol chiamare *sviluppabile osculatrice. Segando la sviluppabile con un piano, il punto in cui questo piano taglia la curva gobba è una cuspide per la curva sezione.*

I punti in cui si incontrano due generatrici non infinitamente vicine della sviluppabile, formano una curva che si chiama la *curva doppia o nodale della sviluppabile.*

La curva sezione della sviluppabile con un piano, ha un punto doppio in ogni punto in cui la curva nodale è tagliata dal piano.

Una generatrice qualunque della sviluppabile d'ordine n, incontra altre $n-4$ generatrici non infinitamente vicine.

I piani passanti per due generatrici non consecutive inviluppano una nuova sviluppabile la quale è bitangente (tangente in due punti) alla curva gobba, e si dice perciò *sviluppabile bitangente alla curva gobba.*

Per una *curva gobba* si dice numero dei suoi *punti doppi apparenti*, il numero delle rette che da un punto dello spazio possono condursi ad incontrare due volte la curva *(tal numero è natu-*

ralmente costante qualunque sia il punto dello spazio).

Per una superficie sviluppabile si dice numero dei suoi *piani doppi apparenti,* il numero delle intersezioni fra due dei suoi piani inviluppanti, e che si trovano in un piano arbitrario dello spazio *(anche tal numero è naturalmente costante).*

Classe della superficie sviluppabile è il numero dei suoi piani tangenti che passano per un punto arbitrario dello spazio, ovvero il numero dei piani osculatori alla curva cuspidale della sviluppabile, passanti per un punto arbitrario dello spazio.

Caso particolare della superficie sviluppabile è il *cono.* Tale superficie è generata dal movimento di una retta di cui uno dei punti sia fisso.

Supposto che la curva sezione del cono con un piano sia una curva algebrica di ordine n, anche il cono si dice algebrico, ed n si dice il suo *ordine. Classe* del cono è la classe della curva sezione.

Superficie gobba o rettilinea è quella generata dal movimento di una retta due posizioni consecutive della quale non sieno generalmente in uno stesso piano.

Una superficie gobba dell'ordine n è anche della classe n e viceversa (CAYLEY, *Camb. Math. Journ.* VII, 1852).

I punti in cui si incontrano due generatrici non consecutive della superficie gobba formano anche in questo caso una *curva doppia o nodale* della superficie.

I piani passanti per due generatrici non consecutive di una superficie gobba sono bitangenti per

la superficie. Essi inviluppano una superficie sviluppabile che si dice sviluppabile bitangente della superficie gobba data.

La classe della sviluppabile bitangente di una superficie gobba è eguale all'ordine della curva doppia (Cayley).

Consideriamo ora alcune relazioni fondamentali riguardanti *una superficie generale di ordine n, senza singolarità* (v. § 4). Insieme alla superficie generale si considerano le altre due superficie sviluppabili inviluppate dai piani bitangenti alla superficie, e dai piani stazionari.

Indichiamo con:

n l'ordine della superficie,

a l'ordine del cono circoscritto alla superficie col vertice in un punto arbitrario dello spazio,

δ il numero delle generatrici doppie di tal cono,

$\varkappa$ il numero delle generatrici di regresso di tal cono,

n' la classe della superficie,

a' la classe di una sua sezione piana,

δ' il numero delle tangenti doppie di questa,

$\varkappa'$ il numero delle sue tangenti di flesso,

b' la classe della superficie sviluppabile inviluppata dai piani bitangenti della superficie,

k' il numero dei piani doppi apparenti di tale superficie sviluppabile, cioè il numero delle intersezioni di due dei suoi piani, le quali si trovano in un piano arbitrario dato,

t' il numero dei piani tritangenti della superficie,
q' l'ordine della sviluppabile dei piani bitangenti,
ρ' l'ordine della curva dei punti di contatto dei piani bitangenti,
c' la classe della sviluppabile dei piani tangenti stazionari della superficie,
h' il numero dei piani doppi apparenti di questa,
r' l'ordine di questa stessa superficie,
β' il numero dei piani comuni alle due superficie sviluppabili, (quella dei piani bitangenti, e quella dei piani stazionari), e che sieno anche stazionari per quest'ultima superficie,
γ' il numero dei piani comuni alle stesse superficie sviluppabili, ma che sieno anche stazionari per la prima superficie,
σ' l'ordine della curva parabolica.

Si hanno allora le seguenti relazioni:

$$a = a' = n(n-1),$$

$$\delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\varkappa = n(n-1)(n-2),$$

$$n' = n(n-1)^2,$$

$$\delta' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9),$$

$$\varkappa' = 3n(n-2),$$

$$b' = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$

$$k' = \frac{1}{8} n (n-2) (n^{10} - 6 n^9 + 16 n^8 - 54 n^7 +$$
$$+ 164 n^6 - 288 n^5 + 547 n^4 - 1058 n^3 +$$
$$+ 1068 n^2 - 1214 n + 1464),$$
$$t' = \frac{1}{6} n (n-2) (n^7 - 4 n^6 + 7 n^5 - 45 n^4 +$$
$$+ 114 n^3 - 111 n^2 + 548 n - 960),$$
$$q' = n (n-2) (n-3) (n^2 + 2 n - 4),$$
$$\rho' = n (n-2) (n^3 - n^2 + n - 12),$$
$$c' = 4 n (n-1) (n-2),$$
$$h' = \frac{1}{2} n (n-2) (16 n^4 - 64 n^3 + 80 n^2 - 108 n +$$
$$+ 156),$$
$$r' = 2 n (n-2) (3 n - 4),$$
$$\beta' = 2 n (n-2) (11 n - 24).$$
$$\gamma' = 4 n (n-2) (n-3) (n^3 + 3 n - 16),$$
$$\sigma' = 4 n (n-2).$$

Due superficie di ordini n_1 e n_2 si segano secondo una curva storta di ordine $n_1 n_2$.

Tutte le superficie di ordine n che passano per

$$N(n) - 1 = \binom{n+3}{3} - 2$$

punti dati arbitrariamente nello spazio, si segano secondo una stessa curva gobba d'ordine n^2.

Ogni superficie di ordine n che passa per

$N(n) - 1$ *punti arbitrari di una curva gobba di ordine* n^2 *intersezione completa di due superficie d'ordine* n*, contiene per intero questa curva.*

Data una curva gobba d'ordine μ*, per essa si può sempre far passare una superficie d'ordine* n*, purchè sia*

$$N(n) > n\,\mu,$$

perchè allora prendendo sulla curva arbitrariamente $n\,\mu + 1$ *punti, ogni superficie d'ordine* n *passante per essi conterrà interamente la curva d'ordine* μ.

Il numero delle condizioni semplici cui corrisponde, per una superficie d'ordine n*, il passare per la curva d'ordine* μ*, ha per limite superiore il numero*

$$n\,\mu + 1.$$

Per una curva di genere zero (v. § 4) tal numero di condizioni è esattamente $n\,\mu + 1$.

Per una curva di genere 1 *(curva ellittica), tal numero di condizioni è* $n\,\mu$ (HERMITE, *Crelle*, LXXXII).

Per una curva di genere p $(\leqq \mu - 3)$*, tal numero di condizioni semplici è* $n\,\mu + 1 - p$ (LINDEMANN, *Crelle*, LXXXIV; HALPHEN, *J. École polyt.* LII, pag. 15).

Se la curva è intersezione completa di superficie degli ordini n_1, n_2*, allora le condizioni semplici corrispondenti, per una superficie di ordine* n*, alla condizione di passare per la curva sono ancora in numero di*

$$n\,\mu + 1 - p$$

qualunque sia p, *purchè sia*

$$n \geqq n_1 + n_2 \quad 3;$$

in altro caso, ponendo

$$n = n_1 + n_2 - \delta$$

il richiesto numero di condizioni è sempre

$$n\mu + 1 - p + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6}$$

(v. HALPHEN, op. cit. pag. 18).

La curva gobba intersezione completa di due superficie d'ordini n_1, n_2 *è individuata da*

$$N(n_1) - N(n_1 - n_2) - 1$$

punti dati ad arbitrio nello spazio.

Se la linea d'intersezione di due superficie di ordine n *contiene una curva di ordine* $n\,p$ *la quale è situata per intero su di una superficie di ordine* p, *la rimanente parte è una curva d'ordine* $n\,(n - p)$ *situata su di una superficie d'ordine* $n - p$ (PONCELET, 1830).

Tutte le superficie d'ordine n *che passano per* $N(n) - 2$ *punti dati ad arbitrio nello spazio, passano per altri* $n^3 - N(n) + 2$ *punti individuati dai primi.*

Tre superficie di ordini n_1, n_2, n_3 *si tagliano in* $n_1\,n_2\,n_3$ *punti, di cui alcuni sono determinati dagli altri; propriamente:*

Se $n_1 \geqq n_2 + n_3$ *saranno arbitrari*

$$\frac{1}{2}\,n_2\,n_3\,(2\,n_1 - n_2 - n_3 + 4) - 1$$

punti, e gli altri saranno determinati da questi.

Se invece è $n_1 < n_2 + n_3$, *ma* $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ *saranno arbitrari*

$$\frac{1}{2} n_2 n_3 (2 n_1 - n_2 - n_3 + 4) + N (n_2 + n_3 - n_1 - 4)$$

punti. Queste formole non valgono per $n_2 = n_3$ (Jacobi, *Crelle*, XV).

Se degli n^3 *punti comuni di tre superficie di ordine* n, $n^2 p$ *stanno su di una superficie di ordine* p, *gli altri* $n^2 (n - p)$ *staranno su di una superficie di ordine* $n - p$ (Poncelet).

Tre superficie di ordini n_1, n_2, n_3 *le quali hanno in comune una curva d'ordine* n *e di classe (rango)* r, *si segano ulteriormente in*

$$n_1 n_2 n_3 - n (n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$$

punti.

Se la curva è doppia per la prima superficie (v. § 4) il numero dei punti comuni è

$$n_1 n_2 n_3 - n (n_1 + 2 n_2 + 2 n_3 - 4)$$

(v. Salmon-Fiedler, *Geom. d. Raumes*, II, 146, 3.ª ediz.).

Se un punto comune a tre superficie di ordini n_1, n_2, n_3 *è multiplo* (v. § 4) *di ordini* λ, μ, ν *per esse rispettivamente, è condizione necessaria e sufficiente che in quel punto sieno raccolte* $\lambda \mu \nu$ *delle* $n_1 n_2 n_3$ *intersezioni, che i coni tangenti alle tre superficie nel punto comune, non abbiano alcuna generatrice comune.* Una dimostrazione rigorosa di questo teorema (estensione di altro simile per le curve piane, v. p. es. il lavoro di Voss citato

a pag. 200 di questo volume) si propose di darla Berzolari (*Ann. di mat.* XXIV).

Di teoremi sulle intersezioni di superficie si occuparono Poncelet (*Prop. project.*, etc. II), Jacobi (*Crelle*, XV), Plücker (*Id.*, XVI, XIX), Cayley (*Papers*, I, 259), Reye (*Math. Ann.*, II), etc., etc.

A proposito di tali ricerche sono interessanti quelle relative ai casi in cui le superficie abbiano in comune punti o linee multiple.

Risultati su ciò son dovuti a Cayley nella sua Mem. sulla trasf. birazionale dello spazio (*Proc. math. Soc.* III, 1870) colle sue formole cosiddette di *equivalenza e di postulazione*. Indi se ne occuparono Noether (*Ann. di mat.* V) e altri.

Si possono enunciare per le superficie e curve storte, teoremi che sono da reputarsi estensioni di quei che costituiscono i fondamenti della teoria dei gruppi di punti su di una curva piana.

Sia data una superficie generale F_n di n^{mo} ordine. Due curve R, R' che insieme formano l'intersezione completa di F_n con un'altra superficie, si dicono *residuali*, e l'una il *resto* dell'altra. Due curve si dicono poi *corresiduali*, se ciascuna è residuale rispetto ad un'altra medesima curva. Analoghe definizioni per i gruppi di punti segati da superficie su di una curva storta.

Si possono enunciare allora *i teoremi del resto (Restsätze)* per le superficie e per le curve gobbe:

Se su di una superficie, due curve R, R' sono residuali ad una medesima curva R'' e quindi

corresiduali fra loro, e se R è residuale ad un'altra curva R'', anche R' sarà residuale ad R''.

Sia una curva R data come intersezione di due superficie F, Φ, e sia R' una CURVA-RESTO *di R; le superficie passanti per R' taglino R in gruppi di punti corresiduali ad un altro dato gruppo; mutando F, Φ e R' e lasciando inalterato solo R, il sistema dei gruppi di punti resta inalterato.*

Le ricerche di questo genere *(la geometria su di una superficie algebrica)* di cui la prima idea è dovuta a CLEBSCH, furono fatte specialmente da NOETHER (*Math. Ann.* II, VIII); negli ultimi tempi se ne sono occupati principalmente CASTELNUOVO e ENRIQUES in varie pubblicazioni.

Una esposizione dei risultati ottenuti si può vedere in un lavoro degli stessi ultimi autori nei *Math. Ann.* XLVIII.

Le prime ricerche sulla teoria delle superficie datano dai tempi di EULERO, a cui si devono anche i fondamenti della teoria delle superficie sviluppabili.

Trattati sistematici sulla teoria delle superficie dal punto di vista della geometria superiore, non ne esistono molti. Riserbandoci di citare ai luoghi opportuni le memorie speciali, ricorderemo qui solo, come opere fondamentali, il libro di CREMONA (*Prelim. di una teoria geom. delle sup.* Bologna, 1866; trad. in tedesco da CURTZE, Berlin, 1870) e il libro di SALMON sulla *Geometria analitica dello spazio* (trad. in tedesco da FIEDLER, 3.ª ediz. Leipzig, 1880). Si noti che nella tradu-

zione tedesca del libro di Cremona sono aggiunti moltissimi altri paragrafi che non figurano nel testo originale; per molti argomenti bisognerà intendere dunque citato sempre il testo tedesco.

§ 2. — Rappresentazione analitica delle curve storte. Le superficie monoidi di Cayley.

Un problema interessante nella teoria delle curve storte algebriche è quello sulla rappresentazione analitica di tali curve.

Se le coordinate di un punto della curva sono assegnate in funzione di un parametro, allora il problema è risoluto, ma tale esprimibilità è rare volte agevole.

L'idea di rappresentare la curva mediante le equazioni di due superficie passanti per essa, è naturalmente la più naturale che si presenta; ma è facile riconoscere l'esistenza di curve che non sono *intersezioni complete* di due superficie; quindi la precedente rappresentazione cade in difetto come quella che non può servire ad *individuare* in generale la curva storta.

Allora si pensò di individuare la curva mediante le equazioni di *tre* superficie passanti per essa, le quali non avessero altri punti in comune. Però si è riconosciuto che in generale *tre* superficie non bastano, e, come conseguenza di un teorema di Kronecker (*Crelle*, XCII) nella teoria delle funzioni algebriche, si trova che per individuare una

curva generale possono occorrere fino alle equazioni di *quattro* superficie. Il VAHLEN trovò (*Crelle*, CVIII) il seguente esempio al proposito: Supponiamo che l'intersezione di due superficie F_μ, F_ν di ordini μ, ν, si scinda in due curve R_m^p, $R_{m'}^{p'}$, di ordini m, m', e di genere p, p'. * Il numero dei punti d'intersezione delle due curve è

$$s = m(\mu + \nu - 4) - 2(p - 1).$$

Si conduca una nuova superficie F_ρ solo per R_m^p; questa sarà tagliata da $R_{m'}^{p'}$ in

$$S = \mu\nu\rho - m(\mu + \nu + \rho - 4) + 2(p - 1)$$

punti che sono su tutte tre le superficie, ma non su R_m^p.

Ora per una data R_m^p non sarà possibile in generale determinare tre superficie in modo che S si annulli; infatti consideriamo una quintica di genere zero R_5^o avente una quadrisecante; se S dovesse annullarsi, poichè per R_5^o non passa alcuna superficie di 2.° ordine, dovrebbe essere $\mu = \nu = \rho = 3$; ma da tre superficie di 3.° ordine non può essere determinata isolatamente la R_5^o perchè è facile vedere che ogni tale superficie,

* Per la definizione di genere delle curve storte v. il § 4.

contenendo la R_5^0, viene a contenere anche la quadrisecante.

Un altro metodo per la rappresentazione di una curva storta è quello di considerare l'insieme di tutte le corde della curva stessa; introducendo le sei coordinate di rette nello spazio, il complesso delle corde sarà analiticamente rappresentato da una relazione fra tali sei coordinate; ma viceversa non ogni relazione fra le sei coordinate di rette rappresenterà in siffatto modo una curva (v. la *Geometria della retta*). Di siffatta rappresentazione si occuparono Cayley (*Quart. Journ.*, III, V, 1860, 1862) e Voss (*Math. Ann.*, XIII).

Finalmente un altro metodo di rappresentazione è quello anche di Cayley, e cosiddetto delle *superficie monoidi*.

Sieno x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate omogenee di un punto della curva, e dal punto $O, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ vertice del tetraedro fondamentale proiettiamo sul piano $x_4 = 0$, la curva R_m^p di ordine m e genere p.

L'equazione della curva proiezione sia

$$f(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

dove supponiamo scelte le coordinate ξ in modo che

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Si hanno allora le relazioni

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \frac{\psi_n(\xi)}{\psi_{n-1}(\xi)}$$

dove le ψ sono funzioni razionali intere delle ξ di ordine n e $n-1$ rispett.

La curva R_m^p appare allora anche come intersezione delle due superficie

$$f_m(x) = 0 \quad \text{e} \quad x_4 \psi_{n-1}(x) - \psi_n(x) = 0$$

di cui la prima è un cono di m^{mo} ordine col vertice nel punto O ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), e la seconda è una superficie di n^{mo} ordine avente il punto O per punto $n - 1^{plo}$ (v. § 4) e che da Cayley fu chiamata una superficie *monoide.*

Il cono e il monoide si tagliano, oltre che in R_m^p, *anche in* $m(n-1)$ *rette passanti per* O, *le quali sono le intersezioni dei due coni* $f_m = 0$ *e* $\psi_{n-1} = 0$; *queste rette si dividono in*

$$(n-1)(m-n) + \alpha$$

rette, ciascuna contata due volte e che sono rette doppie del cono $f_m = 0$; *e in*

$$(n-1)(2n-m) - 2\alpha$$

rette le quali insieme colle precedenti sono situate sul cono $\psi_n(n) = 0$.

I due coni $\psi_n = 0$ e $\psi_{n-1} = 0$ si chiamano rispettivamente *cono superiore e inferiore* del monoide.

Se R_m^p *non è curva piana, sarà sempre*

$$n \geqq \frac{1}{2} m;$$

del resto l'ordine del monoide non è determinato, potendo un monoide sostituirsi con un altro di ordine diverso.

Questo artifizio fu esposto da CAYLEY (*Compt. Rend.* 1862), e servì poi a vari autori (NOETHER, HALPHEN, WEYR, etc.) nei loro studi sulle curve storte.

§ 3. — CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE STORTE.

Al problema della rappresentazione analitica di una curva storta è intimamente legato quello della classificazione delle medesime, giacchè per le curve storte non sussiste più, come per le curve piane, o per le superficie, il fatto che basta l'ordine a caratterizzare la specie di curva; infatti già per l'ordine 4, esistono due curve diverse caratterizzate da proprietà affatto distinte, come fu riconosciuto da SALMON (*Camb. Journ.* V, 1850) e poi da STEINER (*Fläch. 3.ter Grad.*, *Crelle*, LIII, 1856).

Il problema di cui parliamo si può enunciare nettamente nel seguente modo:

Enumerare, definire e distinguere tra loro le diverse famiglie di curve del medesimo grado, in modo che ciascuna famiglia non possa giammai essere caso particolare d' un' altra più generale.

In queste ricerche non si considerano che curve senza punti singolari, (v. § 4) ammettendo come postulato che ogni curva a punti singolari è caso particolare di una curva dello stesso ordine senza punti singolari. V. HALPHEN, sottocit.

Di questo problema si occuparono specialmente HALPHEN e NOETHER in due Memorie le quali furono premiate col premio Steiner dall'Accademia

di Berlino nel 1882 (v. *Journ. de l'École polyt.*, cahier LII, 1882; *Berlin. Abhand.*, 1883; *Crelle*, XCIII), ai quali lavori ne seguirono degli altri fra cui quello di VALENTINER (*Acta Math.* II), di NOETHER (*Id.*, VIII) etc.

Queste ricerche non giungono ancora a risolvere il problema in tutta la sua generalità, ma solo per casi speciali.

Stabilito che l'ordine solo non basta per caratterizzare una curva storta, vien l'idea di introdurre altri numeri che potrebbero chiamarsi *caratteristici*, e che insieme all'ordine possano caratterizzare la curva. La prima idea che si presenta (dalla considerazione delle due specie di quartiche storte) è di considerare, insieme all'ordine, il numero h dei *punti doppi apparenti*, (cioè il numero delle corde che possono condursi alla curva da un punto *arbitrario* dello spazio).

Ma si trova che per l'ordine eguale a 9, esistono due curve *diverse*, e in cui il numero dei punti doppi è il medesimo ($h = 18$). Queste due curve si possono però distinguere fra loro per un altro numero che HALPHEN indicò colla lettera n, e *che è l'ordine minimo dei coni che contengono tutte le h corde che da un punto arbitrario dello spazio possono condursi alla curva*, inquantochè *per l'una è* $n = 4$ *e per l'altra è* $n = 5$. Ma HALPHEN stesso si accorse che per il 15.^mo^ ordine si trovano due curve diverse per le quali è però sempre $h = 63$, $n = 9$.

Inoltre CAYLEY (*Crelle*, CXI; *Math. Pap.*, V. 613) fece osservare che in certi casi nei quali HALPHEN avea trovato una curva, tale curva non

può effettivamente esistere se non per speciali configurazioni delle h linee nodali; p. es. per le curve di 9.° ordine per le quali è $h = 16$ e $n = 4$, Cayley trovò che per la loro esistenza non basta che le 16 linee nodali sieno situate su di un cono quartico, ma che stieno contemporaneamente su due; onde oltre che i tre numeri (ord $= d$, h, n) non bastano in generale per individuare la curva, c'è da aggiungere anche la ricerca delle condizioni perchè la curva avente quei tali numeri caratteristici, sia effettivamente esistente.

Esporremo ora i principali teoremi trovati da Halphen e altri.

Le curve di grado d, con h punti doppi apparenti, formano una sola famiglia se h è compreso fra

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad e \quad \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

Il massimo valore di h è $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, e il minimo è il numero intero massimo contenuto in $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Però non si può scegliere arbitrariamente h fra tali limiti, epperò per un dato d la serie degli h presenta lacune; non presenta invece più lacune a partire dal massimo intero contenuto in

$$\frac{(d-1)(d-2)}{3}$$

in poi.

Le curve di ordine d, per le quali è h inferiore al massimo intero contenuto in $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *sono situate su superficie di 2.° grado; se h è maggiore di tal numero le curve corrispondenti stanno su di una superficie cubica; se h è maggiore di* $3\frac{(d-2)^2}{8}$, *le curve corrispondenti stanno su superficie di quart' ordine, etc.*

Ogni curva di ordine d, per la quale il numero n (v. sopra) è minore di $\frac{2}{3}(d-3)$, *è situata su di una superficie di 2.° ordine.*

Ogni curva di ordine d, non situata su di una quadrica, e per la quale è $n < \frac{3}{4}(d-4)$ *è situata su di una superficie cubica; se è* $n < \frac{4}{5}(d-5)$ *la curva è situata su di una superficie di 4.° ordine, se non è già situata su superficie di 2.° o 3.° ordine; se è* $n < \frac{5}{6}(d-6)$ *e la curva non è situata su superficie di ordine inferiore, essa è situata su superficie di 5.° ordine.*

Le seguenti tabelle danno, per ciascun ordine d, il numero delle famiglie di curve esistenti; queste tabelle le riproduciamo dal lavoro citato di HALPHEN, però ci limitiamo solo ai primi casi, tantopiù che i risultati di Halphen non sono completamente sicuri; per il caso del nono ordine la tabella di HALPHEN deve essere p. es. corretta nel modo indicato da CAYLEY (*Papers*, V, pag. 616). Per la definizione di *genere* vedi il § 4:

1) *curve* STORTE, *non degenerate, di 2.° ordine non ne esistono;*

2) *ordine* $d = 3$ — *Esiste* UNA SOLA *famiglia di cubiche storte; il numero dei punti doppi apparenti è* $d = 1$; *il genere è* $p = 0$;

3) *ordine* $d = 4$ — *Esistono* DUE *famiglie di quartiche storte; esse si differenziano per il numero dei punti doppi apparenti che sono rispettivamente 2 e 3. I loro generi sono rispettivamente 1 e 0;*

4) *ordine* $d = 5$ — *Esistono* TRE *famiglie di quintiche storte.*

Nella seguente tabella sono indicati i valori corrispondenti di h, n, gli ordini minimi delle superficie dalle cui intersezioni risultano quelle curve, le curve complementari risultanti dalle intersezioni di quelle superficie, e finalmente il massimo genere p delle curve di ciascuna famiglia:

$d = 5$	$h =$	$n =$	Ordini minimi delle superf. ecc.	Curve complementari	$p =$
	4	2	2 e 3	una retta	2
	5	2	3 e 3	una quartica storta con 3 punti doppi apparenti	1
	6	3	3 e 3	due coniche	0

Tutte siffatte curve sono determinate da 20 condizioni.

Il Salmon nella *Geom. des Raumes* II, distingue quattre famiglie di quintiche; però la quarta è da considerarsi un caso particolare della terza (vedi Halphen, *Ec. polyt.* LII, pag. 12 nota);

5) *ordine $d=6$ — Esistono* CINQUE *famiglie di sestiche storte. Il numero delle costanti di tutte tali curve è 24, cioè ciascuna di esse è determinata da 24 condizioni.*

La tabella corrispondente è la seguente:

$d=6$	$h=$	$n=$	Ordini minimi delle superf. ecc.	Curve complementari	$p=$
	6	2	2 e 3	0	4
	7	3	3 e 3	cubica storta	3
	8	3	3 e 3	una retta e una conica	2
	9	3	3 e 3	tre rette	1
	10	4	3 e 4	un'altra sestica della medesima famiglia	0

6) *ordine* $d=7$. *Esistono* SETTE *famiglie di curve storte di 7.*[mo] *ordine. Il numero delle loro costanti è sempre 28.*

$d=7$	$h=$	$n=$	Ordini minimi delle superf. ecc.	Curve complementari	$p=$
	9	3	2 e 4	una retta	6
	10	3	3 e 3	una conica	5
	11	4	3 e 3	due rette	4
	12	4	3 e 4	una sestica storta con 6 punti doppi apparenti	3
	13	4	4 e 4	curva storta di nono ordine	2
	14	4	4 e 4	curva storta di nono ordine	1
	15	5	4 e 4	curva storta di nono ordine	0

In tutti questi casi, come si vede, basta il numero h per caratterizzare la curva; è dal nono ordine, come abbiamo già detto, che comincia a verificarsi il fatto che il numero h non basta più per tale scopo

In corrispondenza a questo fatto si verificherà anche l'altro che, per l'ordine $d=9$, vi saranno due famiglie di curve *aventi il medesimo genere p*

massimo (propriamente $p = 10$) e da considerarsi come distinte.

Per le particolarità riguardanti specialmente le secanti multiple relative alle varie famiglie di curve sopra enumerate, rimandiamo a Noether (op. cit.; p. es. *Crelle*, XCIII, pag. 310).

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo aggiungere che si è anche immaginato da alcuni di classificare le curve storte secondo la natura della superficie sviluppabile corrispondente. Di ciò si occuparono Chasles (*Comp. Rend.* t. LIV) e Schwarz (*Crelle*, LXIV).

§ 4. — Punti singolari di superficie e curve gobbe. — Loro numeri caratteristici. — Secanti multiple delle curve gobbe. — Genere. — Formole di Cayley. — Contatti di superficie.

Se un punto di una superficie è tale che ogni retta passante per esso incontra ivi la superficie in due punti coincidenti, quel punto si dirà *doppio* per la superficie.

Vi sono infinite rette che, passando per il punto doppio P, hanno ivi un contatto tripunto colla superficie (tre intersezioni infinitamente vicine). Il luogo di queste rette è un cono di 2.° ordine, di cui ogni piano tangente sega la superficie secondo una curva che ha una cuspide in P.

Questo cono può scindersi in due piani distinti o in due piani coincidenti; si hanno allora tre

sorta di punti doppi; *punto conico*, *punto biplanare*, *punto uniplanare*.

Se $F = 0$ è in coord. omogenee, l'equazione della superficie, la condizione perchè la superficie abbia un punto doppio è che sia zero il suo DISCRIMINANTE, *cioè il risultato dell' eliminazione delle x fra le quattro equazioni*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0;$$

e le condizioni perchè un punto (x) sia doppio sono che le sue coordinate soddisfino contemporaneamente queste quattro equazioni.

Vi sono in generale sei generatrici del cono tangente, le quali hanno colla superficie un contatto quadripunto (quattro intersezioni infinitamente vicine).

Se un punto di una superficie è tale che ogni retta passante per esso incontra ivi la superficie in r punti coincidenti, quel punto si dirà r^{plo} per la superficie. Anche qui, come nel caso precedente *si può costruire un cono d'ordine r, di cui ogni generatrice ha colla superficie in quel punto $r + 1$ punti comuni (cono osculatore); in questo cono vi sono poi in generale $r(r+1)$ generatrici aventi colla superficie $r + 2$ punti comuni.*

Una superficie d'ordine n con un punto O n^{plo} è necessariamente un cono di vertice O.

Una superficie può avere *linee multiple o singolari* cioè linee tutti i punti delle quali sieno multipli. Lungo una linea multipla d'ordine r passano r falde della superficie.

I punti di una linea multipla d'ordine r sono punti multipli d'ordine r pei quali il cono tangente di cui si è sopra parlato, si scinde in r piani.

Per $r = 2$, se i due piani tangenti coincidono si ha la *curva cuspidale* della superficie, ogni punto della quale è un punto uniplanare.

Come per le linee piane, così anche per le superficie si può definire un numero che si chiama *genere*, e che dipende in generale dal numero delle linee doppie e cuspidali della superficie, supposto che questa non abbia altre linee singolari di ordine più elevato.

Un siffatto numero fu introdotto da Clebsch (*Comptes Rendus*, LXVII, 1868) ed è definito, per una superficie di ordine n, come il numero dei coefficienti ancora indeterminati che restano nell'equazione di una superficie di $n - 4^{mo}$ ordine la quale passi per le linee doppie e cuspidali della superficie data.

Se questa non ha linee doppie e cuspidali, il genere è

$$p = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 . 3}.$$

Questo numero p resta invariato per una trasformazione birazionale. Questo teorema fu annunciato da Clebsch (*Compt. Rend.* 1868) indi dimostrato da Noether (*Math. Ann.* II) e Zeuthen (*Id.* IV). Accanto a questo genere il Noether (*Id.* VIII) considerò altri due numeri che godono di analoga proprietà.

Se la superficie ha una curva doppia dell'ordine d ($\geqq 0$) e di genere π, e un certo numero finito t ($\geqq 0$) di punti tripli per essa e per la curva, il numero

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1$$

si chiama *genere numerico* (Cayley, *Math. Ann.*, III). Si chiama poi *genere geometrico* p_g (detto anche *primo genere*) il numero dei coefficienti indeterminati delle superficie di ordine $n-4$, cui si è sopra accennato. *Si ha sempre* $p_g \geqq p_n$. *Se è* $p_g = p_n$, la superficie si suol chiamare *regolare*.

Per le superficie razionali (rappresentabili sul piano, v. pag. 341) *è* $p_n = p_g = 0$.

Per genere di una rigata si assume il genere p, delle loro sezioni piane, *queste essendo evidentemente tutte dello stesso genere. Per una rigata si ha* $p_g = 0$, $p_n = -p$.

Per un *altro carattere delle superficie* v. Segre (*Atti Torino*, 1896), e per altre considerazioni riguardanti i vari generi delle superficie v. Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, XLVIII).

La superficie generale di ordine $n > 3$ *non possiede alcuna retta.*

Se una superficie di ordine n contiene una curva multipla secondo l' ordine $(n-2)$, *essa conterrà delle rette; se la curva multipla è una retta, la superficie conterrà* $2(3n-4)$ *altre rette, oltre quella.* Per una tal superficie v. Noether (*Math. Ann.*, III, pag. 175).

Una superficie di n^{mo} *ordine non può avere più di* $n(11n-24)$ *rette.*

Per una retta di una superf. di ord. n, passano sempre $(n+2)(n-2)^2$ piani, i quali toccano la superficie ancora in un altro punto fuori della retta.

Se è n l'ordine di una rigata, l'ordine della sua curva doppia (v. § 1) *è compreso fra* $(n-2)$ *e* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (CAYLEY).

Ricerche sulle relazioni che intercedono fra i numeri caratteristici e le singolarità delle superficie furono fatte da SALMON, CAYLEY, ZEUTHEN; v. SALMON-FIEDLER, *G. d. R.*, II, pag. 671.

Quando un punto di una curva gobba è tale che ogni piano passante per esso, incontra ivi la curva in due punti coincidenti, allora quel punto si dice *doppio* per la curva. *Esistono in generale due rette tangenti e due piani osculatori alla curva nel punto doppio.* Se quelle due tangenti coincidono si ha la *cuspide o il punto stazionario* della curva. *Nel punto stazionario coincidono anche i due piani osculatori della curva.*

Se due superficie si toccano in un punto P (hanno il piano tangente comune) la curva intersezione di esse ha in P un punto doppio.

Se questo punto è in particolare una cuspide si dice che *le due superficie hanno in P un contatto stazionario.*

Se la curva d'intersezione delle due superficie ha in P un punto triplo, si dice che *esse si osculano in P. In tal caso ogni piano per P taglia le due superficie secondo linee osculantesi fra loro.*

Se un punto comune a due superficie è r_1^{plo} per l'una e r_2^{plo} per l'altra, esso è multiplo d'ordine $r_1 r_2$ per la curva intersezione; se $r_1 = r_2$ e le due

superficie hanno in quel punto lo stesso cono osculatore, quel punto è invece multiplo di ordine $r(r+1)$ *per l' intersezione.*

Se due superficie hanno un contatto d' ordine $k-1$ *lungo una curva d'ordine* n, *esse si segheranno secondo un'altra curva d'ordine* $n_1 n_2 - k n$.

Il massimo numero di punti in cui due superficie di ordini n_1, n_2 *si possono toccare è*

$$\frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1$$

Per una curva storta e per la corrispondente sviluppabile osculatrice sono interessanti le seguenti formole (dette di Cayley, *Journ. de Liouville* X, 1845; *Opere*, I, 207) le quali legano i diversi numeri caratteristici della curva e sono analoghe alle formole di Plücker (v. Cap. VI, § 1) mediante le quali possono in parte trovarsi.

(Si riscontri il § 1 per le definizioni riguardanti il sistema costituito dalla curva gobba, dalla sviluppabile osculatrice, dalla curva nodale, e dalla sviluppabile bitangente.)

Sia:

n l'ordine della curva gobba,

r la classe della curva gobba, o il suo rango,

h il numero dei punti doppi apparenti della curva, cioè il numero delle rette che da un punto arbitrario possono condursi ad incontrare due volte la curva,

y il numero dei piani che passano per un punto arbitrario dello spazio e toccano in due punti distinti la curva (bitangenti), cioè la classe della sviluppabile bitangente.

β il numero delle cuspidi (punti stazionari),

H il numero dei punti doppi,

v il numero delle tangenti d'inflessione (stazionarie) della curva (tangenti aventi comuni colla curva tre punti infinitamente vicini).

Sia poi:

m la classe della sviluppabile osculatrice alla curva,

r il suo ordine, o il suo rango,

g il numero delle rette di un piano qualsivoglia, per ciascuna delle quali passano due piani tangenti della sviluppabile, ossia la classe della congruenza delle rette intersezioni dei piani osculatori della curva (v. *Geom. della retta*).

x il numero dei punti situati in un piano qualsivoglia, per ciascuno dei quali passano due diverse generatrici della sviluppabile, ossia l'ordine della curva nodale,

α il numero dei piani stazionari (piano che tocca la sviluppabile lungo due generatrici infinitamente vicine, ovvero dei piani che hanno comuni colla curva quattro punti infinitamente vicini),

G il numero dei piani bitangenti (tangenti in due punti) alla sviluppabile,

v il numero delle generatrici per ciascuna delle quali passano tre piani tangenti consecutivi (generatrici d' inflessione).

ω il numero delle generatrici doppie della sviluppabile.

Si hanno allora le seguenti relazioni (*di* CAYLEY).

$$m = r(r-1) - 2(x+\omega) - 3(n+v),$$
$$n = r(r-1) - 2(y+\omega) - 3(m+v)$$
$$r = m(m-1) - 2(g+G) - 3\alpha =$$
$$= n(n-1) - 2(h+H) - 3\beta$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6(x+\omega) - 8(n+v)$$
$$\beta = 3r(r-2) - 6(y+\omega) - 8(m+v)$$
$$n+v = 3m(m-2) - 6(g+G) - 8\alpha$$
$$m+v = 3n(n-2) - 6(h+H) - 8\beta$$

che corrispondono a *sei* indipendenti.

Si dice *genere* di una curva gobba o della sua sviluppabile osculatrice il numero definito dalle seguenti formole:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+H+\beta)$$

$$= \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (y+\omega+m+v)$$

$$= \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (g+G+\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (x+\omega+n+v).$$

Introducendo ora queste altre caratteristiche:

k il numero dei punti doppi apparenti della curva nodale,

λ il numero delle rette tangenti e secanti altrove la curva data,
τ il numero dei punti tripli della curva nodale, o dei punti tripli della sviluppabile, o il numero dei punti d'incontro di tre tangenti (non infinitamente vicine) della curva data,
λ' il numero dei piani osculatori e tangenti altrove alla curva data,
τ' il numero dai piani tritangenti della curva data,
R il rango o la classe della curva nodale,
p' il genere della stessa,

si hanno le seguenti altre relazioni:

$$\lambda = n(r+4) - 6(r+\beta) - 4(\omega + H) - 2v$$

$$\tau = \frac{1}{3}[(x - m - 3n - 3v - 2\omega)(r-2) + 8m + \\ + 20v + 10\beta + 18\omega]$$

$$\lambda' = m(r+4) - 6(r+\alpha) - 4(\omega + G) - 2v$$

$$\tau' = \frac{1}{3}[(y - n - 3m - 3v - 2\omega)(r-2) + 8n + \\ + 20v + 10\alpha + 18\omega]$$

$$R = rm + 6r - 3n - 9m - 3v - 2G$$

$$k = \frac{1}{8}[r^4 - 6r^3 + 11r^2 + 66r - \\ - 2r(r-5)(m + 3n + 3v + 2\omega) + \\ + (m + 3n + 3v + 2\omega)^2 - \\ - 58m - 126n - 126v - 76\omega - 24H)$$

$$p - p'(r - 14) = \frac{1}{2}(r-5)(r-6) - (\omega + G + H).$$

Queste formole furono considerate da Salmon (*Trans. R. I. Acad.* XXIII, 1857), Cayley (*Quart. Journ.* XI; *Op.* VIII. 72), Cremona (trad. tedesca dei *Preliminari*, cap. IV), Zeuthen (*Ann. di mat.* III). Esse si trovano anche riportate in Salmon-Fiedler (*An. Geom. d. R.* II, pag. 660 e seg., 3.ª edizione). *

* Poichè i vari autori hanno adoperato simboli diversi per indicare le caratteristiche, sarà qui utile, per comodità del lettore, porre, nella seguente tabella, in relazione fra loro le diverse notazioni adoperate:

Notazioni di Cayley	Notazioni di Cremona	Notazioni di Salmon	Notazioni nostre
m	ν	m	n
n	μ	n	m
r	ρ	r	r
α	α	α	α
β	β	β	β
υ	θ	θ	v
g	γ	g	g
h	8	h	h
Δ	γ	G	G

Alla curva storta di ordine $n_1 n_2$ intersezione completa di due superf. di ordini n_1, n_2 le quali si toccano semplicemente in δ punti, e hanno γ contatti stazionari, corrispondono le seguenti ca-

Notazioni di Cayley	Notazioni di Cremona	Notazioni di Salmon	Notazioni nostre
H	ϑ'	D	H
x	ξ	x	x
y	η	y	y
ω	ω	d	ω
k	$\varkappa$	k	k
γ	λ	γ	λ
γ'	λ_1	γ'	λ'
t	τ	t	τ
t'	τ_1	t'	τ'
D_x		p^*	p'
q		R	R

ratteristiche:

$$p = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) - (\delta + \chi - 1)$$

$$m = 3 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6 \delta - 8 \chi$$

$$r = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2 \delta - 3 \chi$$

$$h = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)$$

$$g = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) [9 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6 (6 \delta + 8 \chi) - 22] + \frac{5}{2} n_1 n_2 + (3 \delta + 4 \chi)(6 \delta + 8 \chi + 7)$$

$$y = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) [n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2 (2 \delta + 3 \chi) - 10] + 4 n_1 n_2 + \frac{1}{2} (5 \delta + 3 \chi)^2 + 10 \delta + \frac{27}{2} \chi$$

$$x = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) [n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2 (2 \delta + 3 \chi) - 4] + \frac{1}{2} (2 \delta + 3 \chi)^2 + 4 \delta + \frac{11}{2} \chi .$$

$$\alpha = 2 n_1 n_2 (3 n_1 + 3 n_2 - 10) - 3 (4 \delta + 5 \chi)$$

$$\beta = \chi$$

$$H = \delta$$

$$G = 0$$

$$v = 0$$

$$\omega = 0.$$

Se due superficie di ordini $n_1 n_2$ si segano secondo due curve (complementari) di ordini n, n', di classi r, r', aventi rispett. h, δ; h' δ' punti doppi apparenti e effettivi, χ, χ' cuspidi, indicando con k il numero delle loro intersezioni apparenti, cioè il numero delle rette che da un punto dello spazio possono condursi a segare ambedue le curve e con i il numero delle intersezioni effettive, si hanno le relazioni:

$$h + h' + k = \frac{1}{2}(n + n')(n_1 - 1)(n_2 - 1)$$

$$r - r' = (n - n')(n_1 n_2 - 1) - 2(h - h') - 2(\delta - \delta') - 3(\chi - \chi')$$

$$(n_1 + n_2 - 2) n = r + i + 2\delta + 3\chi$$

$$(n_1 + n_2 - 2) n' = r' + i + 2\delta' + 3\chi'$$

donde anche

$$n(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2h + k$$

$$n'(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2h' + k.$$

Per una curva gobba descritta su di un iperboloide la quale incontri in α_1 e α_2 punti rispett. ciascuna generatrice del primo e secondo sistema dell' iperboloide, ed è dotata di δ punti doppi e χ cuspidi, si hanno i seguenti numeri caratteristici:

$$r = 2\alpha_1 \alpha_2 - 2\delta - 3\chi;$$

$$m = 6\alpha_1 \alpha_2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 6\delta - 8\chi;$$

$$y = \frac{1}{2}[2(\alpha_1 \alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 10(\alpha_1 \alpha_2 - \delta - \chi) + 4(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{7}{2}\chi;$$

$$h = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \alpha_2(\alpha_2 - 1)\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[6(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 8\chi\right]^2 - 22\,\alpha_1\alpha_2 + \\ + \frac{27}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(11\,\delta + 14\,\chi)$$

$$x = \frac{1}{2}\left[2(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3\chi\right]^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 - \delta) + \frac{11}{2}\chi$$

$$\alpha = 4\left[3\,\alpha_1\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)\right] - 3(4\,\delta - 5\chi).$$

Se in particolare la curva gobba è l'intersezione completa dell'iperboloide con una superficie generale dell'ordine μ, basterà in queste formole porre $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$, per ricavarne i numeri caratteristici pel nuovo caso.

Una curva gobba descritta su di un iperboloide, la quale incontri in α_1 e α_2 punti rispett. ciascuna generatrice del 1.° e 2.° sistema, non può avere più di

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1$$

punti doppi e cuspidi. Per $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$ si ha il teorema corrispondente al caso in cui la curva sia intersezione completa dell'iperboloide con una superficie di ordine μ.

I precedenti teoremi possono ottenersi mediante la cosiddetta rappresentazione piana dell'iperboloide (v. § 7).

Siano n e p l'ordine e il genere (v. sopra) di una superficie rigata algebrica; ν e π l'ordine e il genere di una curva algebrica tracciata sulla rigata e che sia curva semplice per questa; sia k il

numero dei punti d'incontro della curva con ciascuna generatrice della rigata, e δ il numero dei suoi punti doppi; *si ha allora la relazione rimarchevole*

$$(k-1)\nu - \pi - \delta = \frac{k(k-1)}{2} n - k(p-1) - 1.$$

Per il caso in cui la rigata è un cono questa formola fu trovata da STURM (*Math. Ann.* XIX, 487); per il caso generale la formola si trova in SEGRE (*Lincei.* 1887; *Math. Ann.*, XXXIV).

Alle formole di questo paragrafo, sono affini quelle riguardanti le rette che incontrano una curva storta in più di due punti *(secanti multiple)*, o che incontrano due o più curve storte.

Le secanti triple di una curva storta di ordine n, con h punti doppi apparenti, formano una superficie rigata di ordine

$$(n-2)\left(h - \frac{n(n-1)}{6}\right).$$

Questa formola fondamentale si trova per la prima volta in ZEUTHEN (*Ann. di mat.* 1870); indi in PICQUET (*Bull. de la Soc. math.* I, pag. 268, 1872), in SCHUBERT (*Kalkül der abz. Geom.* Leipzig, 1879, § 43), in GEISER (*Collect. math.*, etc. Milano, 1881) e in BERZOLARI (*Rend. Palermo.* IX, 1895).

Il numero delle quadrisecanti di una curva gobba di ordine n con h punti doppi apparenti è

$$\frac{1}{2} h(h - 4n + 11) - \frac{1}{24} n(n-2)(n-3)(n-13).$$

Questa formola si trova prima in Zeuthen (Op. cit.), indi in Picquet (Op. cit. e *Compt. Rend.* LXXVII, 1873) e Berzolari (Op. cit.).

Il numero delle rette trisecanti di una curva di ordine n con h punti doppi apparenti, e che incontrano un'altra curva di ordine n' avente colla prima un numero di punti comuni eguale ad i, è

$$n'(n-2)\left(h-\frac{1}{6}n(n-1)\right)-i(h-n+2).$$

Le rette che incontrano in due punti una curva di ordine n e con h punti doppi apparenti, e in due punti un'altra curva cui corrispondono le caratteristiche n' e h' e che ha colla prima un numero eguale ad i di punti comuni, sono in numero di

$$h\,h'+\frac{1}{4}n\,n'(n-1)(n'-1)-i(n-1)(n'-1)+ \\ +\frac{1}{2}i(i-1).$$

Le rette che incontrano in due punti una curva (n, h) e in un punto ciascuna di due altre curve di ordini n', n'' aventi i', i'' punti comuni colla prima e j punti comuni fra loro, sono in numero di

$$n'\,n''\left(h+\frac{1}{2}n(n-1)\right)-(n-1)(i'\,n''+i''\,n')- \\ -h\,j+i'\,i''.$$

Le rette appoggiate a quattro curve di ordini $n_1\,n_2\,n_3\,n_4$ tali che quelle degli ordini n_r, n_s ab-

biano i_{rs} punti comuni, sono in numero di

$$2\, n_1\, n_2\, n_3\, n_4 - \sum_1^4 n_p\, n_q\, i_{rs} + \Sigma\, i_{pq}\, i_{rs}$$

dove gli indici p, q, r, s sono tutti diversi.

Per tutte queste formole si suppone che i punti comuni alle curve sieno tutti distinti. Esse si trovano in PICQUET (*cit.*); per una correzione ad alcuni dei risultati di quest'autore si vegga GUCCIA (*Rend. Palermo*, I).

§ 5. — SUPERFICIE POLARI. SUPERFICIE COVARIANTI.

Tralasciamo di stabilire le definizioni e le proprietà fondamentali della teoria della polarità, perchè queste non sono che le analoghe di quelle stabilite al § 2 del Cap. VI pel caso delle curve piane.

Ci limiteremo solo a ciò che si presenta di nuovo nel caso delle superficie.

La prima polare di un punto qualunque O, rispetto ad una superficie, sega questa in una curva che è la curva di contatto della superficie col cono circoscritto di vertice O.

Se il polo è sulla superficie fondamentale, questa e tutte le sue superficie polari hanno ivi lo stesso piano tangente e le stesse rette osculatrici.

La quadrica polare ($(n-2)^{ma}$ superficie polare) di un punto parabolico della superficie, è un cono tangente al relativo piano tangente staziona-

rio, e la generatrice di contatto è la retta che in quel punto oscula la superficie fondamentale.

Un punto parabolico della superficie data è anche parabolico per tutte le proprie superficie polari.

Le $(n-r)^{ma}$ polare di un punto r^{plo} della superficie fondamentale, è un cono d'ordine r col vertice nel punto, e le polari seguenti sono indeterminate. Quel cono d'ordine r è il luogo delle rette aventi in quel punto $r+1$ punti comuni colla superficie, e le intersezioni di esso colla $(n-r-1)^{ma}$ superficie polare, sono le rette (in numero di $r(r+1)$) che hanno $r+2$ punti infinitamente vicini comuni colla superficie.

Il luogo dei punti i cui piani polari passano per una retta, è una curva gobba d'ordine $n-1$. Questa curva si chiama *curva polare della retta data.*

L'inviluppo dei piani polari dei punti di una retta è una sviluppabile di classe $n-1$, e di ordine $2(n-2)$, che si chiama *la polare $n-1^{ma}$ della retta.*

La linea nodale di questa sviluppabile è una curva di ordine $2(n-3)(n-4)$ che è il luogo dei poli di cui le prime superficie polari sono tangenti alla retta in due punti distinti.

L'inviluppo dei piani polari dei punti di una curva d'ordine m è una sviluppabile di classe $m(n-1)$, che è anche il luogo dei punti le cui prime superficie polari sono tangenti alla curva.

Analogamente possono enunciarsi molti altri simili teoremi sugli inviluppi dei piani polari dei punti di una superficie, luoghi dei poli dei piani tangenti ad una superficie, ecc., ecc.

Il luogo dei punti doppi delle prime polari di una superficie F_n è una nuova superficie che si chiama la *superficie Hessiana* della data, ovvero la *Jacobiana del sistema delle prime polari.*

Il luogo dei punti le cui prime polari hanno punti doppi è una superficie detta *Steineriana* della data.

Le equazioni di queste superficie si ritroverebbero colle formole analoghe a quelle relative alle omonime curve del § 2, Cap. VI.

Altre definizioni di queste superficie sono:

L'Hessiana di F_n è il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle prime polari di F_n passano per uno stesso punto, ovvero:

il luogo dei punti di contatto delle prime polari di F_n, ovvero:

il luogo di un punto la cui quadrica polare rispetto ad F_n è un cono.

La Steineriana di F_n è il luogo di un punto che è il vertice di un cono di 2.° grado costituente una quadrica polare, ovvero:

l'inviluppo dei piani polari dei punti dell' Hessiana.

L'Hessiana è di ordine $4(n-2)$; *ed ha in generale* $10(n-2)^3$ *punti doppi.*

La Steineriana è una superficie di classe

$$4(n-1)^2(n-2),$$

e possiede $10(n-2)^3$ *rette, ognuna delle quali corrisponde ad un punto doppio dell' Hessiana;* cioè propriamente:

La quadrica polare di un punto doppio dell'Hessiana è costituita da una coppia di piani

passanti per la corrispondente retta della Steineriana, e il piano polare di un punto doppio della Hessiana è tangente alla Steineriana lungo la corrispondente retta.

La curva parabolica di una superficie data, (la quale è di ordine $4n(n-2)$) è l'intersezione completa della superficie colla sua Hessiana.

Se la superficie data possiede una retta semplice questa è tangente in $2(n-2)$ punti alla Hessiana, e quindi alla curva parabolica.

§ 6. — Sistemi lineari di superficie.

Se $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \ldots$ sono (in notazione simbolica) le equazioni di $k+1$ superficie di ordine n, il sistema rappresentato da

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \ldots = 0$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono $k+1$ parametri arbitrari, costituisce ciò che si chiama *un sistema lineare di specie k.*

Per $k=1$ si ha *il fascio;* per $k=2$ *la rete.*

Tutte le superficie di un fascio hanno in comune una curva d'ordine n^2 (curva base del fascio) e tutte quelle di una rete hanno in comune n^3 punti base.

Per $k = N(n) = \binom{n+3}{3} - 1$ (v. § 1) *il sistema è costituito da tutte le superficie di ordine n dello spazio.*

Data una superficie d'ordine n, le prime polari dei punti di un piano formano una rete, e le prime polari dei punti dello spazio formano un sistema lineare di 3.ª specie.

Un sistema lineare di specie k è determinato da $k+1$ superficie dello stesso ordine che non appartengano ad un medesimo sistema lineare di specie inferiore.

Fra le superficie di un sistema lineare di specie k, ve ne sono $(k+1)(n-k)$ che hanno un contatto d'ordine k con una retta data, e ve ne sono

$$2^k \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k+1)}{k!}$$

ciascuna delle quali tocca k volte una retta data.

Fra le superficie di un fascio ve ne sono

$$2(n-1)$$

tangenti ad una data retta, e $3(n-1)^2$ tangenti ad un piano dato.

Fra le superficie di una rete ve ne sono $3(n-2)$ osculatrici ad una retta data,

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

che hanno un doppio contatto con un piano dato, e $12(n-1)(n-2)$ che hanno un contatto stazionario con un piano dato.

Il luogo dei poli di un piano dato rispetto a tutte le superficie di un fascio, è una curva gobba d'ordine $3(n-1)^2$.

In un fascio di superficie ve ne sono $4(n-1)^3$ *con un punto doppio; ciascuno di questi ha il medesimo piano polare rispetto a tutte le superficie del fascio.*

Il luogo dei poli di un piano rispetto a tutte le superficie di una rete, è una superficie d'ordine $3(n-1)$.

Il luogo dei punti di contatto fra un piano e le superficie di una rete è una curva d'ordine

$$3(n-1).$$

Il luogo dei punti doppi delle superficie di una rete è una curva gobba d'ordine $6(n-1)^2$, *la quale è anche il luogo dei punti di contatto fra le superficie della rete stessa, o anche il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie della rete passino per una stessa retta.* Questa curva prende il nome di *curva Jacobiana della rete.*

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie di un sistema lineare di 3.ª specie, passano tutti per un punto è una superficie d'ordine $4(n-1)$, *che si chiama la* HESSIANA O JACOBIANA DEL SISTEMA; *essa è anche il luogo dei punti doppi delle superficie del sistema, o il luogo dei punti di contatto delle superficie dello stesso.*

Se il sistema lineare è quello delle prime polari di una superficie data, si ha la Hessiana o Jacobiana della superficie (v. § 5).

Si può definire una superficie analoga anche per il caso in cui sieno date quattro superficie, ma non dello stesso ordine, cioè non formanti un sistema lineare; propriamente:

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto a quattro date superficie di ordini n_1, n_2, n_3, n_4, passano per uno stesso punto, è una superficie di ordine

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4,$$

che si chiama *Hessiana o Jacobiana* delle quattro superficie.

Si possono poi anche qui considerare sistemi lineari di specie k, di superficie, *fra loro in corrispondenza proiettiva, o proiettivi*, e studiare i luoghi generati dalle intersezioni delle superficie corrispondenti.

Per i molti teoremi su questo soggetto rimandiamo specialmente alla citata *Introduzione* di CREMONA.

§ 7. — TRASFORMAZIONE BIRAZIONALE DELLO SPAZIO, O DELLE SUPERFICIE. — RAPPRESENTAZIONE PIANA DELLE SUPERFICIE.

Come nel piano si può immaginare la trasformazione biunivoca fra due piani (Cremoniana) o *semplicemente* fra due curve dei due piani, senza che lo sia fra i due piani, così nello spazio, possiamo immaginare trasformazioni biunivoche fra due spazi, o *solo* fra due superficie dei due spazi. Quest' ultimo problema è quello della cosiddetta rappresentazione di una superficie su di un'altra, di cui è caso particolare la *rappresentazione piana* delle superficie.

Sieno $x_1 x_2 x_3 x_4$ le coordinate omogenee dei punti di uno spazio e $y_1 y_2 y_3 y_4$ quelle in altro spazio, e si pongano le relazioni

$$y_i = f_i (x_1 x_2 x_3 x_4) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (1)$$

dove le f sieno funzioni razionali intere omogenee di grado n; queste relazioni sieno tali che da esse si ricavino le x per mezzo delle y:

$$x_i = \varphi_i (y_1 y_2 y_3 y_4) \qquad (2)$$

dove anche le φ *sieno funzioni razionali*, intere, omogenee di grado m. Una trasformazione di questa specie si dice *biunivoca, birazionale* o *Cremoniana; per essa i punti dei due spazi si corrispondono uno ad uno.*

Dato il punto (x), colle formole (1) si trova il corrispondente punto (y); dato il punto (y) come intersezione dei tre piani

$$\sum_1^4 \lambda_i y_i = 0, \qquad \sum_1^4 \mu_i y_i = 0, \qquad \sum_1^4 \nu_i y_i = 0,$$

i punti x corrispondenti saranno le intersezioni delle tre superficie

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i (x) = 0, \qquad \sum_1^4 \mu_i f_i (x) = 0, \qquad \sum_1^4 \nu_i f_i (x) = 0;$$

Perchè la trasformazione sia biunivoca, bisogna che queste tre superficie abbiano UN SOL PUNTO *di intersezione variabile, tutti gli altri punti d'intersezione rimanendo fissi comunque si variino i parametri* λ, μ, ν. Di qui si ha:

Per la trasformazione biunivoca occorre che tutte le superficie del sistema lineare di 3.ª specie:

$$\sum_1^4 \rho_i f_i = 0$$

passino per $n^3 - 1$ *punti fissi.*

Per la trasformazione biunivoca è necessario che le superficie $f_i(x) = 0$ *sieno di genere zero. Le coordinate dei loro punti si possono esprimere in funzione razionale di due parametri.* Tali superficie furono chiamate *omaloidi* da Cremona e *unicursali* da Cayley.

L'intersezione R variabile (cioè non comune a tutte le f) di due qualunque delle superficie $f_i = 0$ *è una curva razionale (di genere zero) di ordine m.*

Un sistema di superficie come quello formato dalle f si suol chiamare *omaloidico.*

È da osservarsi che non si verifica più qui ciò che si verifica pel caso della trasformazione birazionale piana, che cioè i gradi m ed n devono essere eguali.

Si dicono *principali* o *fondamentali* i punti e le linee comuni a tutte le superficie del sistema omaloidico.

Delle n m intersezioni di una curva R (v. sopra) con una superficie f su cui non giaccia per intero, ve ne sono $n m - 1$ *situate nei punti e nelle curve fondamentali della trasformazione.*

A ciascun punto di una curva fondamentale che sia i^{pla} *per tutte le superficie del sistema omaloidico, corrisponde una curva razionale d'ordine i, luogo geometrico della quale è una superficie*

che fa parte della Jacobiana del sistema lineare delle superficie $\varphi_i = 0$.

Una curva fondamentale dello spazio (x), *i*[pla] *per le superficie* $f = 0$, *se è segata dalle curve* R, *è multipla secondo l'ordine* $4\,i - 1$ *per la Jacobiana delle* f. *Se poi non è incontrata dalle curve* R, *è multipla secondo l'ordine* $4\,i$ *per la Jacobiana delle* f.

Un punto fondamentale dello spazio (x), *l*[plo] *per le* f, *è multiplo secondo* $4\,l - 2$ *per la Jacobiana delle* f.

Per le relazioni numeriche fra gli ordini di molteplicità dei punti e delle curve fondamentali, analoghe a quelle che si trovano nel caso della trasformazione piana, e che noi abbiamo citato al § 5 del Cap. VI, si vegga Noether (*Ann. di mat.* V, pag. 175-176).

La teoria della trasformazione birazionale dello spazio non è stata ancora studiata così perfettamente come quella del piano.

Le opere principali sull'argomento sono quelle di Cayley (*Proc. of the London Math. Soc.* III, 171), Cremona (*Gött. Nach.,* 1871, *Math. Ann.* IV., *Rend. Ist. Lomb.*, 1871, *Annali di mat.*, V, *Acc. Bologna*, 1871-1872), Noether (*Math. Ann.*, III).

Caso particolare è la *trasformazione per raggi vettori reciproci* o *inversione*, *che ha la proprietà di conservare gli angoli.*

Se vogliamo che la trasformazione non sia birazionale *per tutto lo spazio*, ma solo per due superficie $F(x) = 0$, e $\Phi(y) = 0$ contenute nei due

spazi allora non è necessario che le superficie del sistema lineare

$$\sum_1^4 \rho_i f_i(x) = 0$$

abbiano $n^3 - 1$ punti comuni; *è necessario solo che tutte le superficie di questo sistema che passano per un punto di $F = 0$, non si interseghino contemporaneamente sulla stessa superficie.*

Sussiste anche qui il teorema da reputarsi come estensione di quello di Riemann, che cioè *è il medesimo il genere delle due superficie che si trasformano biunivocamente l'una nell'altra.* Vedi su questo Clebsch (*Compt. Rend.*, 1868; *Math. Ann.*, II), Cayley (*Math. Ann.* III), Noether (*Annali di mat.* V, *Math. Ann.* II, VIII), Zeuthen (*Math. Ann.* IV).

Come pel caso delle curve piane così anche per le superficie si è tentato qualcosa di simile alle ricerche di Noether sulla scomposizione dei punti singolari; si è cercato, cioè, se è possibile con trasformazioni birazionali di spazio, o di superficie, ridurre una superficie con singolarità elevate, in un'altra con sole singolarità ordinarie. Di questo problema si sono occupati in vario senso Noether (*Math. Ann.* XXIX, *Berl. Sitzungsb.* 1888); Del Pezzo (*Rend. Palermo*, II, III), Segre (*Ann. di mat.* XXV) Pannelli (*Id.* XXV) Levi (*Id.* XXVI). Per il problema simile riguardante le curve gobbe si vegga Poincarè (*Compt. Rend.* CVIII, 1888, Pannelli, *Rend. Ist. Lomb.*, 1893.

Caso particolare della trasformazione birazionale delle superficie è la cosiddetta *rappresenta-*

zione piana delle superficie. Secondo la denominazione di Cremona sopra citata, *una superficie che è rappresentabile sul piano è un omaloide.*

Perchè una superficie sia rappresentabile sul piano, deve essere di genere zero.

Una condizione sufficiente per la rappresentabilità piana di una superficie è che essa possieda una schiera semplicemente infinita di curve razionali le quali sieno segate sulla superficie da un fascio di altre superficie (Noether, *Gött. Nach.* 1870; *Math. Ann.* III).

Si abbia una superficie S di ordine n; e le coordinate omogenee dei suoi punti si possano esprimere colle formole

$$x_i = f_i(y_1 y_2 y_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove le f sieno funzioni razionali omogenee di ordine m, e supponiamo che i rapporti fra le y si possano, reciprocamente, da queste formole esprimere come funzioni razionali delle x. Si dirà che la superficie S, è rappresentabile sul piano, perchè interpretando le y come le coordinate omogenee dei punti di un piano, le precedenti formole stabiliranno una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e della superficie S.

Le curve del sistema lineare piano

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i(y) = 0$$

abbiano comuni α_1 punti semplici, α_2 punti doppi, α_3 punti tripli, ecc.

Si ha allora la relazione

$$n = m^2 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \dots$$

Chiamando p_1 il genere di una sezione piana della superficie, d l'ordine della curva doppia della stessa, r l'ordine della curva cuspidale, *si ha la relazione*

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r =$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \alpha_2 - 3\alpha_3 - 6\alpha_4 - \dots$$

Sussiste inoltre la disuguaglianza

$$4 \overline{\overline{<}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \alpha_1 - 3\alpha_2 - 6\alpha_3 - \dots$$

Da queste relazioni si hanno le altre

$$p_1 \overline{\overline{<}} n - 2$$
$$d + r \overline{\overline{>}} \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Per la rappresentabilità piana di una superficie di 4.° ordine, è necessario che questa possieda almeno una retta doppia; per la rappresentabilità di una superficie di 5.° ordine, è necessario che questa possieda almeno una curva doppia di 3.° ordine, ovvero una curva doppia di 2.° ordine, purchè questa si scinda in due rette che non si taglino.

Le superficie di 2.° e 3.° ordine sono evidentemente sempre rappresentabili sul piano. Per le

superficie di 2.° ordine basta proiettarne sul piano i punti, da uno dei loro punti; e per le superficie di 3.° ordine basta considerare due delle loro rette, che non si interseghino, indi da un punto arbitrario di un piano condurre la retta che incontra le due della superficie; essa incontrerà ancora la superficie in un altro punto che corrisponderà biunivocamente al punto del piano.

Per la costruzione geometrica della rappresentazione piana di una superficie di 4.° ordine a conica doppia si può procedere nel seguente modo: Consideriamo una delle 16 rette g della superficie, la quale taglia la conica doppia. Per un punto P di un piano e per g conduciamo il piano, che taglierà ancora la conica in un punto, che congiunto con P dà una retta la quale si appoggia alla conica doppia e a g, e quindi taglia la superficie ancora in un punto Q; *la corrispondenza fra P e Q è biunivoca.*

Se la superficie di 4.° ordine ha una retta doppia, si può fare una costruzione analoga sapendo che vi sono allora sulla superficie delle coniche le quali tagliano la retta doppia.

Per una superficie di 5.° ordine con due rette doppie non intersecantesi, si può fare evidentemente una costruzione geometrica analoga a quella che si è eseguita per le superficie di 3.° ordine.

Per una superficie di 5.° ordine con una cubica doppia, si possono evidentemente prendere come raggi proiettanti, le corde della cubica le quali tagliano la superficie ancora in un punto. Analoga costruzione può farsi se la cubica si scinde in una conica e in una retta che taglia la conica in un

punto, o in tre rette di cui una interseca le altre due. I casi in cui la cubica sia piana, ovvero si scinda in una conica e in una retta che non la incontra, ovvero in tre rette non intersecantesi, non sono possibili.

La rappresentazione piana delle superficie può essere utile per lo studio delle curve tracciate sulle superficie stesse. Le più antiche ricerche sulla rappresentazione piana delle superficie possono dirsi quelle relative alla proiezione stereografica e in generale a tutte quelle proiezioni immaginate per la costruzione delle carte geografiche.

La rappresentazione piana delle superficie di 2.° ordine fu fatta da Plücker (*Crelle*, XXXIV, 1847), Chasles (*Compt. Rend.*, 1861), Cayley (*Phil. Mag.*, XXII, 1861), i quali se ne servirono per lo studio delle curve tracciate su di una quadrica (v. anche Clebsch-Lindemann, *Geom.*, II e il Cap. X, § 1 di questo volume).

La rappresentazione piana della cubica fu fatta da Cremona (*Crelle*, LXIX) e Clebsch (*Crelle*, LXV; quelle delle superficie di 4.° ordine a conica doppia o retta doppia o di quelle di 5.° ordine con cubica doppia, furono fatte da Clebsch (*Crelle*, LXIX; *Math. Ann.*, I), Korndörfer (*Math. Ann.*, I, IV), Frahm (*Id.*, VII).

Rappresentazioni piane delle superficie rigate razionali furono studiate da Cremona (*Annali di mat.*, I), Armenante (*Ann. di mat.*, IV, 1870). Clebsch (*Math. Ann.*, II, V), Noether (*Id.*, II).

Nel caso che la superficie non sia algebrica, ma qualunque, il problema della rappresentazione pia-

na di tutta la superficie o di una sua parte, diventa un problema che può trattarsi coi metodi della Geometria Differenziale (vedi).

Come sul piano così anche per lo spazio sono state considerate le *trasformazioni multiple* (vedi Cap. VI, § 5). Fra i lavori su ciò citeremo quello di De Paolis (*Mem. Lincei.* 1885).

CAPITOLO X.

Le curve storte di vari ordini.

§ 1. — Le curve sulle superficie di 2.° ordine. Le curve sferiche.

Come abbiamo detto, nell'ultimo paragrafo del Cap. IX, lo studio delle curve situate su di una superficie di 2.° ordine si può agevolmente fare mediante la rappresentazione piana di tali superficie. Proiettando da un punto P della quadrica, (che può essere anche un punto all'infinito) i punti di questa su di un piano, p. es. sul piano tangente alla quadrica nel secondo punto d'incontro O colla quadrica del diametro passante per P, si ha una rappresentazione piana della quadrica, che può chiamarsi, per analogia con quella della sfera, *proiezione stereografica*.

I punti situati sulle due generatrici della quadrica passanti per P si proiettano tutti in due medesimi punti all'infinito $P_1 P_2$ che si chiamano *punti fondamentali*; la retta $P_1 P_2$ (che in questo

caso è la retta all'infinito) si dice *retta fondamentale*.

L'assieme di tutte le rette della quadrica si proietta nei due fasci di raggi aventi i centri in P_1 e P_2.

Stabiliamo ora sulla quadrica un sistema di coordinate.

Prendiamo per origine delle coordinate il punto O e per assi OX, OY le due rette secondo cui il piano tangente in O taglia la quadrica. * Sia A un punto di questa; per esso passeranno due generatrici, una del primo e una del secondo sistema, le quali andranno rispettivamente a tagliare le generatrici fisse OX, e OY, nei punti A_1 (su OX) e A_2 (su OY); le distanze $\xi = OA_1$ e $\eta = OA_2$ possono assumersi come coordinate del punto A della quadrica. Tali coordinate soglionsi chiamare *iperboloidali*, e furono immaginate da Plücker (*Crelle*, XXXIV).

È notevole il fatto che *il punto situato nel piano tangente XY e avente per coordinate le medesime ξ e η, è la proiezione da P del punto A della quadrica.*

Un'equazione di primo grado

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

fra le coordinate $\xi\eta$, rappresenta sulla quadrica una curva piana passante per il punto P.

Prendendo come assi di coordinate cartesiane nello spazio gli assi OX, OY, e un terzo asse

---

* Volendo eseguire queste costruzioni nel campo reale, basterà supporre che la quadrica sia un *iperboloide*.

OZ qualunque, *le coordinate cartesiane* $x\,y\,z$ *di un punto* A *della quadrica sono legate alle coordinate iperboloidali* $\xi\,\eta$ *del medesimo punto* A, *dalle relazioni*

$$\xi = -\frac{d\,z}{c\,z + \mu\,y}, \quad \eta = -\frac{d\,z}{b\,z + \mu\,x}$$

ovvero

$$\frac{y}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\xi} + \frac{c}{\mu}\right], \quad \frac{x}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\eta} + \frac{b}{\mu}\right]$$

se l'equazione della quadrica è della forma

$$z\,(a\,z + b\,y + c\,x + d) + \mu\,x\,y = 0.$$

Scegliendo in particolare per asse Z il diametro passante per O, *l'equazione della quadrica diventa*

$$z\,(z + d) + \mu\,x\,y = 0 \qquad \text{se la quadrica è un iperboloide}$$

ovvero

$$d\,z + \mu\,x\,y = 0 \quad \text{se è un paraboloide,}$$

e le relazioni soprascritte diventano

$$\xi = -\,\delta\,\frac{z}{y}, \quad \eta = -\,\delta\,\frac{z}{x}, \quad \left(\delta = \frac{d}{\mu}\right).$$

Le precedenti formole si trovano adoperate nell'opera citata di Plücker; in coordinate omogenee le formole acquistano maggiore simmetria (vedi Clebsch-Lindemann, *Geom.* II, pag. 422).

Sieno P, O due qualunque punti della quadrica (non è più necessario che sieno gli estremi di un

diametro), il tetraedro fondamentale delle coordinate abbia per vertici i punti P, O, P_1, P_2 (dove P_1 e P_2 sono i due punti fondamentali nel piano tangente alla quadrica in O).

L'equazione della quadrica sarà della forma

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

se i piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ sono rispettivamente i piani $P O P_1$, $P O P_2$, $O P_1 P_2$, $P P_1 P_2$.

Indicando allora con $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ le coordinate omogenee del punto (nel piano $O P_1 P_2$) proiezione di un punto della quadrica; *si hanno le formole*

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 \xi_3 : \xi_2 \xi_3 : \xi_1 \xi_2 : \xi^2{}_3.$$

Le quantità $\frac{x_3}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}$ possono assumersi come coordinate del punto sulla quadrica (Cayley, *Op.*, V, 70); esse corrispondono in fondo alle coordinate iperboloidali di Plücker.

Ogni curva piana sulla quadrica si proietta in una conica la quale diventa cerchio se P è un punto ciclico od ombelico della quadrica, e O è il punto diametralmente opposto; tutte le coniche siffatte sono fra loro simili e sono similmente disposte; i loro assintoti sono paralleli ai due assi OX, OY intersezioni dèl piano tangente in O colla quadrica.

Una curva di ordine n sulla quadrica, e che non passi per P, si proietta in una curva piana di ordine n.

Se la curva passa m volte per P, la proiezione sarà di ordine $n - m$.

Ogni curva di ordine n sulla quadrica, incontra sempre k volte una qualunque generatrice di un sistema, k' volte un'altra qualunque generatrice dell'altro sistema, in modo che $k + k' = n$; la proiezione di tal curva passerà allora k volte per P_1 e k' volte per P_2. I due numeri k, k' caratterizzano la specie di curve sulla quadrica; tale specie si suole perciò indicare col simbolo $[k, k']$.

Se uno dei numeri k, k' è zero, allora la curva si scinde nell'assieme di n rette della quadrica.

Non considerando come sostanzialmente diverse fra loro le due specie di curve $[k\,k']$ e $[k'\,k]$, si ha:

Vi sono su di una quadrica $\frac{n-1}{2}$ (se n è dispari) e $\frac{n}{2}$ (se n è pari) diverse specie di curve proprie di ordine n.

L'intersezione completa della quadrica con una superficie generale di ordine m è del tipo $[m, m]$.

Per $k\,k' + k + k'$ punti dati ad arbitrio sulla quadrica si può far passare una e una sola curva del tipo $[k, k']$.

Due curve dei tipi $[k, k']$ e $[k_1, k'_1]$ si incontrano in $k\,k'_1 + k'\,k_1$ punti.

Una curva del tipo $[k, k']$ dotata di δ punti doppi e χ cuspidi, tocca

$$2\,k'(k-1) - 2\,\delta - 3\,\chi$$

generatrici del primo sistema e

$$2\,k\,(k'-1) - 2\,\delta - 3\,\chi$$

generatrici del secondo sistema.

Per le singolarità e i numeri caratteristici delle curve tracciate su di una quadrica vedi il § 4 del Cap. IX.

Sulla quadrica non esistono altre curve proprie di 2.° ordine che le sezioni piane, le quali sono del tipo [1, 1].

Non esistono altre curve proprie di 3.° ordine che quelle del tipo [1, 2] *o, ciò che è lo stesso,* [2, 1]; *sono le cubiche storte.*

Esistono due diverse famiglie di quartiche rappresentate rispett. da [2, 2] *(quartiche di 1.ª specie) e* [1, 3] *(quartiche di 2.ª specie).*

La rappresentazione piana delle quadriche fu ideata prima da Chasles, come estensione della proiezione stereografica della sfera (*Ann. de Gergonne*, XVIII, XIX; *Aperçu hist.*, p. 219 (1837)). Lo studio delle curve sulla quadrica fu fatto da Plücker in due Memorie (*Crelle*, XXXIV, 341-360). Dello stesso argomento si occuparono Cayley in una breve nota (*Phil. Magaz.*, XXII, 1861; *Opere*, V, 70) e Chasles (*Compt. Rend.*, 1861). Si vegga anche Clebsch-Lindemann (*Geom.*, II, pag. 414 e seg.).

Casi particolari di queste ricerche sono quelle sulla proiezione stereografica della sfera, e sulle curve sferiche, in particolare sulle cosiddette *coniche sferiche.* La proiezione stereografica della sfera era conosciuta sin dai geometri greci; la sua proprietà più importante è quella cosiddetta della *rappresentazione conforme*, cioè *l'angolo di due curve sferiche è eguale all'angolo delle proiezioni piane delle medesime*, ponendo, come sopra,

il centro di proiezione in un punto P della sfera, e il piano di proiezione parallelo al piano tangente in P, o in particolare, facendo che il piano di proiezione sia il piano tangente nel punto O diametralmente opposto a P.

Questa proprietà sembra trovata da Hooke e Moivre (v. Halley, *Phil. Trans.* 1696); però qualcuno crede che fosse già conosciuta sin dal 1587 da Mercator (v. A. Breusing, *Das Verebnen der Kugeloberfläche etc.* Leipzig, 1892); indi studiata da Lambert, Eulero, Lagrange, Gauss, ecc. (vedi Chasles, *Aperçu hist.* pag. 219 e 235).

Ogni sezione piana della sfera si proietta in un cerchio.

La proiezione del polo del piano segante è il centro del cerchio secondo cui si proietta la sezione piana (teorema di Chasles; v. Hachette, *Géom. à 3 dim.* 1817).

Le coordinate sulla sfera e le coniche sferiche (intersezioni della sfera con coni di 2.° ordine furono studiate da Chasles (*Mém. de Belgique*, VI), Gudermann (*Crelle*, VI), Möbius (*Opere*, II), etc. Un'esposizione dettagliata della loro teoria si può vedere in Hesse (*Anal. Geom. des R.*, 3.ª ediz., pag. 51) e Salmon-Fiedler (*Id.*, I, 3.ª edizione, pag. 340 e seg.).

Una conica sferica è una curva storta di 4.° ordine e di 1.ª specie (v. § 3); essa è l'intersezione della sfera con un cono di 2.° grado avente il vertice nel centro della sfera.

Per una conica sferica è costante il rapporto anarmonico dei quattro raggi che congiungono un punto variabile della curva con quattro punti

fissi della curva stessa, intendendo per rapporto anarmonico dei 4 raggi (non situati in un piano), quello dei 4 piani che li proiettano dal centro della sfera; proprietà analoga a quella delle coniche piane.

Per una conica sferica è costante il rapporto fra il prodotto dei seni delle normali che da un punto della sfera si possono condurre a due archi di circoli massimi tangenti alla conica, e il quadrato del seno della normale condotta all'arco di circolo massimo passante per i due punti di contatto.

Conducendo per il centro della sfera i due piani ciclici del cono di 2.° grado (che lo tagliano secondo cerchi), i circoli massimi corrispondenti sulla sfera a tali piani si chiamano *i circoli ciclici* corrispondenti alla conica sferica.

Se un circolo massimo taglia la conica sferica in due punti P e Q, e i circoli ciclici in A e B, è $AP = BQ$, e in particolare:

L'arco di circolo massimo, tangente alla conica e compreso fra i due circoli ciclici, è tagliato per metà dal punto di contatto.

§ 2. — Le cubiche storte o gobbe.

Due quadriche aventi di comune una retta, si intersecano in una curva residua che è una *cubica gobba.*

Riferendoci alle notazioni adoperate al § 4 del Capitolo IX per i numeri caratteristici e le singolarità delle curve storte, abbiamo i seguenti

valori:

$$\begin{aligned} n &= 3 \quad , \quad m = 3 \\ r &= 4 \quad , \quad g = 1 \\ h &= 1 \quad , \quad x = 0 \\ y &= 0 \quad , \quad \alpha = 0 \\ \beta &= 0 \quad , \quad G = 0 \\ H &= 0 \quad , \quad \omega = 0 \\ v &= 0 \quad , \quad p = 0 \end{aligned}$$

donde i seguenti risultati:

La cubica gobba è una curva di genere zero, e di 4.ª classe; e la sua sviluppabile osculatrice è di 4.° ordine e 3.ª classe.

Per un punto qualunque dello spazio passa una sola corda, e tre piani osculatori alla cubica.

Un piano qualunque dello spazio contiene una e una sola retta intersezione di due piani osculatori della cubica.

La proiezione piana di una curva storta di 3.° ordine è una cubica piana con un punto doppio.

Ogni curva gobba di 3.° ordine si può immaginare tracciata su di una quadrica; essa incontra sempre in un punto le generatrici di un sistema, e in due punti quelle dell'altro (v. § 1, Cap. X). Quindi:

Su di una quadrica possono immaginarsi tracciati due sistemi diversi di cubiche, secondochè incontrano in uno o due punti le generatrici del 1.° sistema (e quindi in due o un punto quelle del 2.° sistema).

Due cubiche di sistemi diversi si incontrano in cinque punti, e due cubiche dello stesso sistema si incontrano in quattro punti.

Se due quadriche si segano in una cubica, e quindi anche in una retta. questa, in ciascuna delle due quadriche, appartiene a quel sistema le cui generatrici sono tagliate in due punti dalla cubica.

Per cinque punti dati ad arbitrio su di una quadrica passano DUE *cubiche giacenti sulla quadrica stessa (una per ciascuno dei due sistemi, v. sopra).*

Per sei punti ad arbitrio dello spazio, passa sempre una cubica.

Per costruire questa cubica basterà condurre il cono quadrico che ha per vertice uno dei sei punti, e che passa per gli altri cinque, e poi ancora l'altro cono quadrico che ha per vertice un'altro dei sei punti, e che passa per gli altri cinque. I due coni si intersegheranno nella retta congiungente i due vertici, e in una cubica che sarà la cubica richiesta.

Una cubica gobba è il luogo dei punti comuni alle terne di piani corrispondenti di tre fasci di piani fra loro proiettivi.

La sviluppabile osculatrice di una cubica gobba può considerarsi come l' inviluppo dei piani passanti per le terne di punti corrispondenti di tre punteggiate proiettive.

Degenerazione della cubica gobba con un sol punto doppio apparente, è l'assieme di una conica e di una retta situata così nello spazio che tagli la conica in un sol punto.

(Proprietà varie delle cubiche.) I quattro piani che passano per una corda variabile della cubica e per ciascuno di quattro punti fissi della stessa, hanno rapporto anarmonico costante.

Quattro piani osculatori della curva sono tagliati in quattro punti aventi rapporto anarmonico costante, da una retta qualunque intersezione di due piani osculatori.

In particolare:

I quattro piani che congiungono una tangente alla curva con quattro punti della stessa, hanno rapporto anarmonico costante al variare della tangente.

I quattro punti in cui quattro piani osculatori sono tagliati da una tangente variabile, hanno rapporto anarmonico costante.

Dati sette punti 1, 2, ... 7, *di una cubica, i piani*

712 e 745

723 e 756

734 e 761

si intersecano in tre rette di un piano, il quale passa per una corda fissa della cubica, se, restando fissi i primi sei punti, muta di posizione solo il punto 7 (Cremona).

Date due cubiche passanti per i medesimi cinque punti, le corde della prima passanti per punti della seconda, incontrano tutte le corde della seconda passanti per punti della prima.

I piani osculatori di tre punti 1, 2, 3 della cubica si tagliano in un punto (4) del piano 1 2 3.

I punti di contatto dei tre piani osculatori condotti alla cubica da un punto (4) stanno in uno stesso piano col punto (4) (Chasles).

La retta intersezione di piani osculatori, esi-

stente nel piano 1 2 3, è la polare armonica del punto 4 rispetto al triangolo (1 2 3). *

La corda della cubica passante pel punto 4 è la retta polare armonica del piano 1 2 3 rispetto al triedro dei tre piani osculatori. **

Quattro punti di una cubica formano un tetraedro, e un altro tetraedro è formato dai piani osculatori nei quattro punti; ciascuno dei due tetraedri è nello stesso tempo iscritto e circoscritto all'altro (Möbius, *Crelle*, III, 273).

Il teorema di Chasles fa vedere che per mezzo di una cubica gobba, si stabilisce nello spazio una corrispondenza speciale fra i punti e piani, in modo che *ad ogni punto corrisponde un piano passante per esso, e ad ogni piano corrisponde un punto in esso situato.* Tale corrispondenza è una *dualità polare o involutoria*, e propriamente una di quelle chiamate *polarità nulle* (v. pag. 62 di questo volume) o *sistemi nulli* (*Nullsystem* dei tedeschi; v. Möbius, *Statik*, I, 151 e *Crelle*, X, 317). Il punto e il piano corrispondente si chiamano *polo* e *piano polare.*

La corda alla cubica, passante per un polo dato P, e la retta situata nel piano polare di P, e in cui si incontrano due piani osculatori della cu-

---

* La *polare armonica s* di un punto *S* (*polo armonico* di *s*) rispetto ad un triangolo è quella retta che taglia i lati di un triangolo ABC in tre punti $A'B'C'$ tali che le coppie di raggi SA, SA'; SB, SB'; SC, SC' sieno in involuzione (v. il teor. 7.mo alla pag. 84 di questo volume).

** Ciascuno potrà facilmente estendere da sè al caso del triedro, la definizione di *polare armonica* contenuta nella nota precedente.

bica, sono due rette corrispondenti nella polarità nulla.

(Costruzioni varie.) I problemi di cui enuncieremo le soluzioni in questo paragrafo sono quelli riguardanti la costruzione di una cubica gobba date che sieno certe condizioni cui essa deve soddisfare.

1. Dati sei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, della cubica, costruire la cubica stessa.

Si faccia passare per (12) un piano arbitrario α, *e si determinino le intersezioni:*

$$[\alpha, (345)] = a, \qquad [\alpha, (456)] = b$$
$$[(23), (561)] = A, \qquad [(61), (234)] = B$$
$$[\alpha, (B\,4)] = C, \qquad [\alpha, (A\,5)] = D$$
$$[(C\,D), a] = E, \qquad [(C\,D), b] = F;$$

il punto

$$[(1\,E), (2\,F)] = P$$

appartiene alla cubica.

Ovvero anche:

Si determinino

$$[\alpha, (45)] = G$$
$$[1\,A\,G] = \beta, \qquad [2\,B\,G] = \gamma$$
$$[\beta, (34)] = H, \qquad [\gamma, (56)] = K;$$

i tre piani

$$[6\ 1\ H], \qquad \alpha, \qquad [2\ 3\ K]$$

si tagliano in un punto della cubica; si ha naturalmente il terzo punto della cubica esistente nel piano α.

2. Dati cinque punti 1, 2, 3, 4, 5, e una secante (a) della cubica, costruire la cubica.

Per la secante (a) *si faccia passare un piano arbitrario* α, *il quale taglia i piani*

$$[123], \quad [124], \quad [134], \quad [234]$$

in quattro rette che insieme con (a) *determinano una conica ad esse tangente; il piano* α *taglia inoltre i piani*

$$[123], \quad [125], \quad [135], \quad [235]$$

in altre quattro rette che insieme ad (a) *determinano un' altra conica; le due coniche hanno per tangenti comuni* (a) *e* $[\alpha, (1\,2\,3)]$. *Il punto d'incontro delle altre due tangenti comuni è punto della cubica.*

3. Dati quattro punti e due secanti, costruire la cubica. *Questo problema o non ha soluzioni o ne ha infinite.*

4. Dati tre punti e tre secanti, costruire la cubica.

Basterà considerare i tre fasci di piani che hanno per assi le tre secanti, e porre in corrispondenza proiettiva i piani dei tre fasci, considerando come corrispondenti i piani che passano per ciascuno dei tre punti assegnati; i punti della cubica si determinano come intersezioni di tre altri qualunque piani corrispondenti.

5. Dati 2 punti A, B, e 4 secanti a, a', b, b', costruire la cubica.

Si costruisca la retta che passa per A *e incontra le rette* a, a'; *e la retta che passa per* A *e*

incontri b, b'; tali rette sieno c, c'; indi si costruiscano similmente le rette d, d' che passano per B e incontrino a, a' ovvero b, b'. L'intersezione dei piani $[c\,d]$ e $[c'\,d']$ sia l; allora i due iperboloidi

$$[a\,a'\,l]; \qquad [b\,b'\,l]$$

si incontrano nella cubica richiesta.

6. *Il problema:* costruire la cubica passante per un punto, e avente per secanti cinque rette date, *ammette anche sempre una soluzione.*

7. *Invece il problema:* costruire la cubica avente sei secanti date, *ammette in generale sei soluzioni.*

Per queste costruzioni rimandiamo alle opere sottocitate di Schröter, Cremona, Sturm.

(Varie specie di cubiche.) Nello stesso modo con cui le coniche si distinguono in specie secondo la realità o meno dei loro punti all'infinito, anche per le cubiche storte possono stabilirsi analoghe distinzioni. Propriamente:

1. Se il piano all'infinito taglia la cubica *in un sol* punto *reale*, si ha la *ellisse cubica.*

2. Se il piano all'infinito contiene *tre* punti *reali* della cubica, si ha la *iperbole cubica.*

3. Se in particolare di tali tre punti reali, due sono coincidenti, si ha la *iperbole cubica parabolica.*

4. Se infine tali tre punti sono tutti coincidenti, cioè il piano all'infinito è piano osculatore, si ha la *parabola cubica.*

Per una iperbole cubica passano tre cilindri iperbolici reali di 2.° grado.

Per una ellisse cubica passa un solo cilindro reale di 2.° grado che è ellittico.

Per un' iperbole cubica parabolica passano due cilindri reali di 2.º grado, di cui uno è iperbolico e l'altro è parabolico.

Per una parabola cubica passa un solo cilindro reale di 2.º grado, il quale è parabolico.

Chiamando *assintoto* la tangente reale (al finito) in un punto all' infinito della curva, si ha:

La ellisse cubica ha un solo assintoto.

La iperbole cubica ha tre assintoti.

La iperbole cubica parabolica ha un solo assintoto.

La parabola cubica non ha alcun assintoto.

Le cubiche gobbe furono studiate per la prima volta da Möbius (*Baryc. Calcul*, 1827, pag. 120; *Crelle*, X) e poi da Chasles (*Aperçu hist.* Note XXXIII; *J. de Liouville*, II, 1854; *Compt. Rend.* XLV). Indi se ne occuparono Seydewitz (*Arch. v. Grunert,* X), Hesse (*Crelle*, XXVI), Schröter (*Id.*, LVI), v. Staudt (*Beiträge*, III, 1860), Cremona (*Ann. di mat.* I, II, V; *Crelle*, LVIII, LX, LXIII; *Nouv. Annales, etc.*, I, 2.ᵉ série), Sturm (*Crelle*, LXXIX, LXXX, LXXXVI), Müller (*Math. Ann.*, I).

Per altre ricerche sulle cubiche storte, specialmente per l' applicazione ad esse della teoria degli invarianti delle forme binarie, si vegga Beltrami (*Ist. Lomb.*, 1868), Sturm *(cit.)*, Voss (*Math. Ann.*, XIII), D'Ovidio (*Acc. Torino*, XXXII, 1879; *Giorn. di Batt.*, XVII; *Collect. math.*, 1881), Pittarelli (*Giorn. di Batt.*, XVII), Gerbaldi (*Mem. Torino*, 1880).

Per trattazioni sulla teoria delle cubiche gobbe citeremo Salmon-Fiedler (*An. Geom. d. R.*, II),

e più specialmente Schroeter (*Th. der Oberf. 2ter Ordn., etc.* Leipzig, 1880).

§ 3. — Le quartiche gobbe di 1.ª specie.

Una quartica gobba di 1.ª specie è l'intersezione completa di due quadriche; *su ciascuna di queste, essa taglia in due punti ogni generatrice di un sistema, e in due punti ogni generatrice dell'altro* (v. § 1).

Le caratteristiche per tale curva, supposto che le due quadriche sieno qualunque, sono le seguenti;

$$
\begin{array}{lcl}
n=4 & , & m=12 \\
r=8 & , & g=38 \\
h=2 & , & x=16 \\
y=8 & , & \alpha=16 \\
\beta=0 & , & G=0 \\
H=0 & , & \omega=0 \\
v=0 & , & p=1
\end{array}
$$

Se poi le due quadriche hanno in un punto un contatto ordinario, allora la quartica acquista un punto doppio, e le sue caratteristiche sono:

$$
\begin{array}{lcl}
n=4 & , & m=6 \\
r=6 & , & g=6 \\
h=2 & , & x=6 \\
y=4 & , & \alpha=4
\end{array}
$$

$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 1 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 0 \quad , \quad p = 0$$

Se le due quadriche hanno in un punto un contatto stazionario, la quartica acquista una cuspide, e le sue caratteristiche diventano:

$$n = 4 \quad , \quad m = 4$$
$$r = 5 \quad , \quad g = 2$$
$$h = 2 \quad , \quad x = 2$$
$$y = 2 \quad , \quad \alpha = 1$$
$$\beta = 1 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 0 \quad , \quad p = 0$$

Degenerazioni della quartica gobba di 1.ª specie sono:

1. Una cubica piana e una retta situata in modo nello spazio che la tagli in un sol punto.
2. Una cubica gobba e una sua corda.
3. Due cubiche situate nello spazio in modo che abbiano in comune due punti.

Dalla proprietà riguardante il numero dei coni quadrici esistenti in un fascio di quadriche, si ricava:

Per ogni quartica di 1.ª specie passano quattro coni quadrici (Poncelet).

Una quartica di 1.ª specie non può avere alcuna trisecante.

Ogni piano del fascio di piani avente per asse una corda o una tangente della quartica di 1.ª

specie, taglia la stessa in due punti la cui congiungente è la generatrice di una quadrica su cui sta tutta intera la quartica.

In tal fascio vi sono quattro piani tangenti alla quartica.

Otto punti dati ad arbitrio nello spazio determinano una quartica di 1.ª specie.

Due quartiche di 1.ª specie situate sulla stessa quadrica si incontrano in otto punti.

Tali otto punti sono quelli nei quali si incontrano tre quadriche; *dati sette di essi, l'ultimo può determinarsi con costruzioni lineari;* essi formano un *gruppo di otto punti associati; per essi passano infinite quartiche* (v. p. es, Hesse, *Crelle*, XXVI; Reye, *Id.*, C; Zeuthen, *Id.*, IC, *Acta math.*, XII, etc.).

Per sei punti di un gruppo di 8 punti associati si conduca la cubica gobba; la retta degli altri due punti è una corda della cubica; e reciprocamente *otto punti di una quartica aventi questa proprietà, sono otto punti associati.*

Per cinque punti di una quartica di 1.ª specie si facciano passare tutte le quadriche possibili, le quali tagliano ancora la quartica in tre punti. Il piano di questi tre punti passa per un punto fisso della quartica stessa.

Si abbiano su di una quartica, due gruppi di otto punti associati, cioè in tutto 16 punti, e fra questi se ne possano scegliere otto da formare un nuovo gruppo di punti associati; allora anche i rimanenti otto formeranno un gruppo di punti associati.

Si conducano tre piani che taglino la quartica nei punti

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3; \end{matrix}$$

i piani $A_1 A_2 A_3$; $B_1 B_2 B_3$; $C_1 C_2 C_3$; $D_1 D_2 D_3$ *tagliano ancora la quartica in quattro punti situati in un piano.*

I quattro piani osculatori in quattro punti situati in un piano, tagliano la curva in quattro punti di un piano (Reye).

Vi sono sulla quartica delle TERNE DI PUNTI $A_1 A_2 A_3$ *dotate della proprietà che i tre piani osculatori in essi, si tagliano in un punto* S *della curva, per il quale passa poi anche il piano* $A_1 A_2 A_3$. Il punto S si dice *punto satellite della terna.*

Si abbia la quartica su di una quadrica; i tre punti $B_1 B_2 B_3$ *in cui le generatrici di un medesimo sistema, passanti per* $A_1 A_2 A_3$ *incontrano ancora la quartica, formano ancora una terna.*

Sia O *un punto della quartica; i tre punti in cui i tre piani* $O A_1 A_2$, $O A_2 A_3$, $O A_3 A_1$ *incontrano ancora la quartica, formano ancora una terna.*

I tre punti in cui i tre piani passanti rispettivamente per A_1, A_2, A_3 *e per una secante o per una tangente della quartica, incontrano ancora la quartica, formano ancora una terna.*

Per costruire una terna di punti, data la quartica, si può procedere nel seguente modo: si as-

suma un punto S della quartica come punto satellite; indi si proietti la quartica da S su di un piano, in una curva di 3.° ordine; *il piano passante per S e per una delle rette d'inflessione della cubica piana, taglia la quartica nei tre punti di una terna.*

Abbiamo sopra detto che *nel fascio di piani che ha per asse una corda della quartica, vi sono quattro piani tangenti alla stessa;* diremo che i quattro punti di contatto formano UNA QUATERNA DI PUNTI.

Il rapporto anarmonico di siffatti quattro piani del fascio è COSTANTE *al variare della corda che è l'asse del fascio stesso*, o anche:

È costante il rapporto anarmonico dei quattro punti in cui le tangenti nei quattro punti di una quaterna tagliano la corda ad essi corrispondente.

I piani passanti per una corda della curva, e per ciascuno dei quattro punti di una quaterna, tagliano la curva in quattro punti formanti a loro volta una quaterna.

Le quattro facce del tetraedro avente per vertici quattro punti di una quaterna, tagliano la curva in quattro punti di un' altra quaterna, i quali non sono altro che i quattro punti nei quali la curva è incontrata dai quattro piani osculatori nei punti della prima quaterna.

Esistono sulla quartica 24 COPPIE *di punti tali che il piano osculatore in un punto della coppia passa per l'altro punto della coppia, e reciprocamente.*

È stata studiata la configurazione dei 16 punti

di contatto colla quartica dei piani stazionari della sviluppabile osculatrice, cioè dei 16 punti della quartica in cui il piano osculatore ha un contatto di 3.° ordine colla curva.

Tali 16 punti sono i punti di incontro della curva colle quattro facce del tetraedro polare, cioè di quello avente per vertici i vertici dei quattro coni passanti per la quartica.

Ogni piano che passa per tre di tali 16 punti, passa ancora per un quarto di essi, il quale però può essere coincidente con uno dei tre già considerati. Si hanno così 116 piani.

I 16 punti si possono rappresentare coi simboli (i, j) *dove* $i, j = 0, 1, 2, 3$, e stanno in un piano quei quattro punti per cui la somma dei primi indici, e quella dei secondi indici sono separatamente $\equiv 0 \pmod{4}$.

Le coordinate di un punto della quartica gobba di 1.ª specie si possono esprimere per funzioni ellittiche di un parametro; propriamente si può porre

$$x = p(u), \qquad y = p'(u), \qquad z = p''(u)$$

dove p *è la nota funzione ellittica di* Weierstrass (v. *Repert.*, I, Cap. XVI, § 4). *Quattro punti in un piano sono allora quelli pei quali la somma dei quattro argomenti è* $\equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$.

Da questo punto di vista la quartica gobba di 1.ª specie si trova studiata in Harnack, *Math. Ann.*, XII; Lange, *Diss*, Dresden, 1882, e *Schlömilch's Zeits.*, XXVIII; v. anche Halphen, *Fonct. ellipt.*, II, pag. 449 e seg.

Le quartiche gobbe di 1.ª specie si trovano stu-

diate in Chasles (*Compt. Rend.*, LII, LIV), Reye (*Ann. di mat.*, II), Gegenbauer (*Wien. Berich.*, XCIII), Ameseder (*Id.*, XXXVII), oltre che nelle altre opere sopra citate. Un trattato su tali curve è quello di Schroeter (*Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurven 4.ter Ord. Iter Species.* Leipzig, 1890) dove possono trovarsi moltissime altre indicazioni.

A tale specie di quartiche appartengono le *coniche sferiche* di cui abbiamo trattato nel § 1.

§ 4. — Quartiche gobbe di 2.ª specie.

La quartica gobba di 2.ª specie è definita come quella quartica per la quale passa *una sola* quadrica.

In generale se una quadrica e una cubica hanno in comune una curva piana di 2.° ordine (due rette in un piano, o una conica) la intersezione residua è una quartica di 1.ª specie; quindi la quartica di 2.ª specie è l'intersezione residua di una quadrica e di una superficie cubica le quali hanno in comune due rette sghembe.

Si ha anche una quartica di 2.ª specie, se la quadrica e la cubica hanno in comune una retta unica la quale sia doppia per la superficie cubica.

Alla superficie cubica generale può sostituirsi una rigata gobba; cioè:

Ogni quartica di 2.ª specie può considerarsi come l'intersezione di una quadrica e di una superficie cubica gobba, la quale ha per direttrice doppia una corda della curva (Cremona).

Ogni quartica di 2.ª specie può considerarsi come il luogo dei punti comuni ai piani corrispon-

denti di tre fasci proiettivi, il primo semplice, il secondo doppio involutorio, e il terzo omografico al secondo (Cremona).

La proiezione piana della quartica di 2.ª specie, è in generale una curva di 4.° ordine, di 6.ª classe, con tre punti doppi, quattro tangenti doppie, e 6 flessi.

Se il centro di proiezione è situato sulla curva si ha una curva di 3.° ordine e 4.ª classe.

Per la quartica di 2.ª specie passano 4 coni di 3.° ordine e 3.ª classe.

I numeri caratteristici per la quartica di 2.ª specie sono:

$$n = 4 \quad , \quad m = 6$$
$$r = 6 \quad , \quad g = 6$$
$$h = 3 \quad , \quad x = 6$$
$$y = 4 \quad , \quad \alpha = 4$$
$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 0 \quad , \quad p = 0.$$

Tutte le generatrici di uno dei due sistemi sulla quadrica sono tagliate in tre punti dalla quartica, e tutte quelle dell'altro sistema sono tagliate in un punto solo (v. § 1); quindi:

La curva ammette un sistema semplicemente infinito di trisecanti.

Esistono quattro punti nei quali la tangente alla curva, taglia ancora la curva stessa.

Questa curva può *in particolare* avere una o due *tangenti stazionarie* ($v = 1, 2$), ciò che invece non può verificarsi per la quartica di 1.ª specie.

I numeri caratteristici per questi casi particolari sono:

$$n = 4 \quad , \quad m = 5$$
$$r = 6 \quad , \quad g = 4$$
$$h = 3 \quad , \quad x = 5$$
$$y = 4 \quad , \quad \alpha = 2$$
$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 1 \quad , \quad p = 0$$

e

$$n = 4 \quad , \quad m = 4$$
$$r = 6 \quad , \quad g = 3$$
$$h = 3 \quad , \quad x = 4$$
$$y = 4 \quad , \quad \alpha = 0$$
$$\beta = 0 \quad , \quad G = 0$$
$$H = 0 \quad , \quad \omega = 0$$
$$v = 2 \quad , \quad p = 0.$$

Degenerazioni della quartica gobba di 2.ª specie sono:

1. Una cubica storta e una retta che la tagli in un sol punto.

2. Due coniche aventi un sol punto comune.

Il rapporto anarmonico dei quattro piani che passano per quattro punti della curva e per una qualunque trisecante della stessa è costante al va-

riare della trisecante. Esso può perciò chiamarsi *il rapporto anarmonico dei quattro punti della quartica.*

Su di una quadrica si possono descrivere due sistemi di quartiche di 2.ª specie, secondochè queste incontrano in un punto le generatrici di un sistema (1.° sistema) e in tre punti le generatrici dell'altro sistema (2.° sistema), ovvero viceversa.

Due quartiche appartenenti a sistemi diversi si incontrano in 10 punti, e due quartiche dello stesso sistema si incontrano in 6 punti.

Una quartica di 1.ª specie e una di 2.ª specie tracciate sulla stessa quadrica, si incontrano in 8 punti.

Una curva cubica gobba e una quartica di 2.ª specie, tracciate sulla stessa quadrica, le quali incontrano ciascuna in un sol punto una stessa generatrice di questa, si segano in cinque punti.

Se invece la cubica incontra in due punti, e la quartica in un sol punto la medesima generatrice, le due curve hanno in comune sette punti.

Per otto punti arbitrari dello spazio passano quattro quartiche di 2.ª specie.

Per sette punti su di una quadrica, si possono descrivere due quartiche di 2.ª specie situate sulla quadrica stessa.

Da un punto P della curva possono condursi tre piani osculatori alla medesima; i tre punti di contatto di questi, stanno in un piano che passa per P, e che è il piano polare armonico della trisecante passante per P rispetto al triedro dei tre piani osculatori (per la definizione di piano polare armonico ci riferiamo a quanto si è detto in nota al § 2 di questo stesso capitolo).

Variando il punto M, il piano dei tre punti di contatto inviluppa un cono quadrico (Cremona).

Si chiamano *corde principali* della curva quelle per le quali passano due piani osculatori alla curva i cui punti contatto sieno i punti nei quali le corde incontrano la curva (Bertini).

Esistono tre corde principali; esse passano per uno stesso punto.

Per un punto dello spazio passano tre corde della curva (perchè $h = 3$); ora se per il medesimo punto conduciamo i sei piani passanti per le tangenti alla curva nei sei punti d'intersezione colle corde, abbiamo:

Tali sei piani toccano un medesimo cono quadrico.

Si ha poi ancora:

I sei piani osculatori condotti da un punto alla curva toccano uno stesso cono quadrico.

Le otto rette condotte da un punto dello spazio ai punti di contatto dei quattro piani bitangenti condotti per tale punto, sono generatrici di un cono quadrico.

I piani osculatori della curva sono tangenti ad una quadrica, i cui piani tangenti tagliano la curva secondo quattro punti formanti un gruppo equianarmonico. Quella quadrica è iscritta nella sviluppabile osculatrice della curva (Cremona).

I piani che tagliano la quartica in quattro punti formanti un gruppo armonico, inviluppano una superficie di Steiner (di 4.° ordine e 3.ª classe) iscritta nella sviluppabile osculatrice della quartica (Cremona).

Consideriamo il fascio di piani che ha per asse una retta che taglia in due punti la quartica; *il luogo della retta che congiunge gli altri due punti di incontro di ciascun piano colla quartica, è una superficie cubica gobba, la cui direttrice doppia è l'asse del fascio di piani.*

Dalle tabelle al principio di questo § risulta che la curva di cui stiamo trattando ha *quattro* piani osculatori stazionari ($\alpha = 4$); ora si ha:

Le quattro tangenti nei quattro punti stazionari (chiameremo *punti stazionari* i punti di contatto dei piani stazionari) *sono situate sul medesimo iperboloide.*

Tali quattro punti stazionari appartengono alla curva nodale (del 6.º ordine) della sviluppabile osculatrice (v. Cap. IX, § 1); *in essi i piani stazionari sono anche piani osculatori per la curva nodale.*

La curva nodale ha anche quattro punti stazionari, e non ha altri punti multipli; essa è l'intersezione di una superficie di 2.º ordine, e di una di 3.º ordine, le quali hanno un contatto stazionario in quattro punti.

La quartica di 2.ª specie incontra la corrispondente curva nodale in otto punti, di cui quattro sono punti stazionari per la quartica, e gli altri quattro sono punti stazionari per la curva nodale.

L'esistenza delle quartiche di 2.ª specie fu notata da Salmon e Cayley (*Camb. Math. Journ.* V, 1850), e indi da Steiner (*Flächen 3ten Grades*, *Crelle*, LIII, 1857).

Il primo lavoro importante sull' argomento fu quello di CREMONA (*Acc. Bologna,* 1861, ovvero *Ann. di Tortolini,* IV); indi si successero molti lavori di WEYR (*Math. Ann.* IV; *Wien. Berich.* 1871-75-76-78), il lavoro di BERTINI (*Ist. Lomb.* 1872), quello di ARMENANTE (*Giorn. di mat.* XI, XII), e molti altri.

Per la quartica di 2.ª specie STUDY ha trovato che, dato un punto dello spazio, resta determinata sulla curva un' involuzione di 4.º ordine e di 1.ª specie (*Leipz. Berichte,* 1886); un caso particolare di tale involuzione era stato già notato da BERTINI *(cit.)*. Tale involuzione supplisce in certo modo alla mancanza di quell' altra esistente su tutte le curve gobbe razionali di ordine $n > 4$ (v. § 6).

La cosiddetta *teoria delle osculanti* è connessa colla teoria di tali involuzioni. (v. JOLLES, *Th. der Osculanten,* Aachen, 1886; STAHL (*Crelle,* CI, CIV).

Per più particolari notizie bibliografiche e storiche si vegga la prefazione di un recente lavoro di BERZOLARI sul medesimo argomento (*Ann. di mat.* XX) il quale ha dimostrato che *la precedente involuzione non è altro che la apolare di quella che si ottiene tagliando la curva con piani passanti pel punto dato.*

Per i casi particolari sopra accennati (pag. 370), in cui la curva possiede delle tangenti stazionarie, v. CREMONA (*Rend. Ist. Lomb.* 1868), APPELL (*Compt. Rend.* 1876), ecc.

§ 5. — Le curve storte di 5.°, 6.°, ecc. ordine.

(Curve di 5.° ordine.) Come abbiamo detto (v. Cap. IX, § 3) vi sono tre famiglie di curve storte di 5.° ordine, una con 4 punti doppi apparenti e di genere massimo 2, l'altra con 5 punti doppi apparenti e di genere massimo 1, e l'altra con 6 punti doppi apparenti e di genere zero. Si intende naturalmente che le curve non abbiano singolarità effettive, cioè punti doppi effettivi, cuspidi, ecc.

Indichiamo queste curve rispettivamente con $R^2{}_5$, $R^1{}_5$, $R^0{}_5$.

Per ogni curva storta di quint' ordine, passano infinite superficie cubiche.

I numeri caratteristici per la $R^2{}_5$ *sono:*

$$r = 12 \qquad x = 48$$
$$m = 21 \qquad y = 32$$
$$h = 4 \qquad \alpha = 32.$$
$$g = 156$$

Gli altri numeri caratteristici sono zero.

Da ogni punto della curva $R^2{}_5$ *parte una sola trisecante della curva stessa.*

Questa curva è l' intersezione parziale di una quadrica e di una cubica, le quali hanno in comune una retta, che è una trisecante della curva.

Il luogo delle trisecanti della curva è la quadrica su cui sta la curva.

Esistono otto punti in cui la tangente alla curva taglia ancora la curva stessa. ($\lambda = 8$; v. Cap. IX, § 4.)

Vi sono 96 punti d' incontro di tre tangenti non infinitamente vicine (punti tripli della curva nodale della sviluppabile).

Vi sono 72 piani osculatori e tangenti altrove, alla curva data.

La curva $R^2{}_5$ non ha alcuna quadrisecante.

La curva $R^2{}_5$ può generarsi mediante tre fasci proiettivi, uno, di superficie di 2.° ordine, e gli altri due, di piani; la quadrica passante per $R^2{}_5$ è quella determinata dalle intersezioni dei piani corrispondenti dei due fasci di piani.

La $R^2{}_5$ può anche definirsi come la intersezione parziale di due superficie cubiche, le quali abbiano in comune ancora una quartica gobba di 1.ª specie. Questa incontra allora otto volte la $R^2{}_5$.

I numeri caratteristici per la $R^1{}_5$ sono:

$$r = 10$$
$$m = 15$$
$$h = 5$$
$$g = 70$$
$$x = 30$$
$$y = 20$$
$$\alpha = 20.$$

Questa curva può considerarsi come la intersezione parziale di due superficie cubiche, le quali si incontrano ancora in una quartica di 2.ª specie.

Da ogni punto della curva si possono condurre ad essa due trisecanti.

Vi sono 10 tangenti della curva le quali tagliano ancora altrove, la curva stessa.

Vi sono 30 piani osculatori e tangenti altrove alla curva data.

Vi sono 40 punti d'incontro di tre tangenti non infinitamente vicine della curva data.

Il luogo delle trisecanti della R^1_5 *è una rigata di 5.° ordine.*

La R^1_5 *non ha alcuna quadrisecante.*

I numeri caratteristici per la R^0_5 *sono:*

$$r = 8$$
$$m = 9$$
$$h = 6$$
$$g = 20$$
$$x = 16$$
$$y = 12$$
$$\alpha = 8.$$

Per ogni punto della curva passano tre trisecanti.

Vi sono 12 rette tangenti e secanti altrove la curva.

Vi sono 12 piani osculatori e tangenti altrove alla curva.

Vi sono 8 punti in cui si incontrano tre tangenti non infinitamente vicine della curva.

Di curve R^0_5 *ve ne sono di due specie caratterizzate da ciò che una contiene una sola retta quadrisecante, e l' altra ne contiene infinite formanti una quadrica.*

Una R^0_5 *della prima specie si può generare come luogo del punto comune ai piani corrispondenti di tre fasci proiettivi, due doppi involutori, il terzo semplice.*

Una R^0_5 *della seconda specie si può generare come luogo del punto comune ai piani corrispondenti di tre fasci proiettivi, due semplici, il terzo triplo involutorio.*

La R^0_5 *della prima specie è l'intersezione parziale di due superficie cubiche aventi ancora in comune una cubica gobba e una retta che non la tagli; ovvero anche l'intersezione parziale di due superficie cubiche rigate aventi di comune una retta doppia, e due altre rette, di cui una tagli la prima e l'altra no.*

La R^0_5 *della seconda specie è l'intersezione parziale di una quadrica e di una rigata di 4.° ordine avente per retta tripla una quadrisecante di* R^0_5.

Le trisecanti di una R^0_5 *della prima specie formano una rigata di 8.° ordine, per la quale la* R^0_5 *è tripla e la sua quadrisecante è retta quadrupla.*

Dal punto di vista della classificazione delle curve storte, la seconda R^0_5 non deve considerarsi come rappresentante una famiglia distinta rispetto alla prima R^0_5, ma un caso particolare di essa (v. su ciò Halphen, *J. École polyt.*, LII, pag. 12).

Le curve di quint'ordine furono considerate prima da Cayley (*Compt. Rend.*, LIV, LVIII, 1862, 1864; *Opere*, V, 15, 24); indi da Sturm (*Fläch. 3ter Ord.* Leipzig, 1867) studiando le curve situate

sulla superficie cubica; poi se ne occuparono (in quanto alla $R^0{}_5$) Bertini (*Collect. math.*, 1881), Berzolari (*Lincei*, Mem., 1893), e, in quanto alla $R^1{}_5$, Weyr (*Wiener Berichte*, 1884-85-88) e Montesano (*Acc. Napoli*, 1888).

(Curve di 6.° ordine.) Di curve storte di 6.° ordine ve ne sono cinque famiglie, caratterizzate dal numero dei punti doppi apparenti (v. Cap. IX, § 3). *Per ognuna di esse passa sempre una cubica.* Fra esse la più importante è quella di genere 4, *intersezione completa di una quadrica e di una cubica.* Questa curva è specialmente importante nella teoria delle funzioni abeliane di genère 4, perchè per tale teoria essa fa lo stesso ufficio, che la quartica piana per le funzioni abeliane di genere 3.

I numeri caratteristici per questa curva sono:

$$r = 18$$
$$m = 36$$
$$h = 6$$
$$g = 531$$
$$x = 126$$
$$y = 96$$
$$\alpha = 60.$$

Per un suo punto passano due trisecanti (le due rette della quadrica su cui essa è situata).

Il numero delle rette tangenti e secanti altrove è 24.

Il numero dei piani osculatori e tangenti altrove è 324.

La sviluppabile osculatrice ha 480 punti tripli.

La curva possiede 120 piani tritangenti, e non può naturalmente possedere alcuna quadrisecante.

Si è cominciato a studiare la configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta, e dei 360 punti di contatto corrispondenti. Tale configurazione è da considerarsi come un'estensione per il genere $p = 4$, di ciò che è per il genere $p = 3$ la configurazione delle 28 tangenti doppie della quartica piana.

I 360 punti di contatto della sestica coi suoi piani tritangenti, stanno a 12 a 12 sopra 32130 quadriche.

Tali quadriche si possono riunire a coppie ed esistono otto specie distinte di tali coppie; una coppia di 1.ª specie è caratterizzata dalla proprietà che esistono 4 altre delle quadriche che incontrano in $6 + 6$ *punti (sulla sestica) ciascuna delle due date, ed esistono inoltre 16 altre quadriche che incontrano in 6 punti (sulla sestica) una delle due della coppia, e solo in tre punti l'altra, non esistendo poi quadriche aventi la proprietà opposta; come si vede, questa coppia possiede dunque una certa dissimmetria.*

Ci basti d'aver dato questi cenni; per altri particolari si vegga Pascal (*Lincei*, 1893).

Se si conoscono due *radici dell'equazione da cui dipende la determinazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta, le altre 118 si scindono in 54 + 64 e l'equazione delle 64 ha per risolvente quella delle 54 la quale a sua volta si*

scinde in 27 fattori quadratici dopo la risoluzione di un' equazioue di 27mo grado la quale non ha risolventi di grado inferiore.

Se se ne conoscono tre, il problema dipende ancora da un' equazione di 27.mo grado non avente risolventi di grado inferiore. Questo teorema è analogo a quello relativo alle 28 tangenti doppie della quartica piana o alle 27 rette della superficie cubica (v. PASCAL, *Lincei*, 1.° sem. 1893, pag. 120.)

Delle sestiche storte si occuparono CLEBSCH *Crelle*, LXIII), BAULE (*Diss.* Göttingen, 1872), WEYR (*Compt. Rend.*, LXXVI), NOETHER (*Crelle*, XCIII), LONDON (*Math. Ann.*, XLV), PETOT (*Compt. Rend.*, CII), ecc.

Per le curve di 7.° ordine citeremo un lavoro di WEYR (*Wien. Berichte*, LXIX), e della curva di 9.° ordine *intersezione completa di due superficie cubiche (cioè curva base di un fascio di superficie cubiche)* riferiremo qui i numeri caratteristici.

Essi sono:

$$r = 36$$

$$m = 81$$

$$h = 18$$

$$g = 3006$$

$$x = 576$$

$$y = 504$$

$$\alpha = 144, \qquad p = 10.$$

Per ogni punto della curva passano 11 trisecanti.

Vi sono 144 rette tangenti e secanti altrove, e 2160 piani osculatori e tangenti altrove.

Vi sono 3360 piani tritangenti.

Per tutte le varie degenerazioni della curva intersezione di due superficie cubiche vedi STURM (*Fläch. 3ter Ord.* Leipzig, 1867).

§ 6. — Le curve storte razionali.

Le curve *di genere zero* si dicono *razionali*, o anche *unicursali*. Sono state stabilite delle loro proprietà generali. Eccone alcune fra le più elementari, riferentisi specialmente ai loro numeri caratteristici. Si suppone naturalmente che la curva sia priva di punti singolari.

La sviluppabile osculatrice d'una curva gobba razionale d'ordine n, è d'ordine $2(n-1)$.

Vi sono $(n-1)^2$ rette appoggiate a due rette arbitrarie e bisecanti della curva.

Una retta mobile appoggiata ad una retta fissa e bisecante della curva, descrive una superficie gobba d'ordine $(n-1)^2$ di cui la retta fissa è multipla d'ordine $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, e la curva data è multipla d'ordine $n-1$, e avente $2(n-1)(n-2)$ punti cuspidali situati sulla curva razionale.

La curva razionale ha evidentemente

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti doppi apparenti.

Per ogni suo punto passano $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *tri-secanti.*

Vi sono $\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3.4}$ *quadrisecanti.*

La superficie gobba formata dalle trisecanti è di ordine

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

La classe della curva è $3(n-2)$.

Per un punto della curva passano $3(n-3)$ *piani osculatori altrove.*

Per ogni punto dello spazio passano

$$2(n-2)(n-3)$$

piani bitangenti.

Per ogni punto della curva passano

$$2(n-3)(n-4)$$

piani bitangenti altrove.

Ciascuna tangente è incontrata da $2(n-3)$ *altre tangenti.*

La curva ha $4(n-3)$ *piani stazionari.*

Vi sono $6(n-3)(n-4)$ *piani osculatori e tangenti altrove.*

Vi sono $2(n-2)(n-3)$ *rette tangenti e secanti altrove.*

La curva ha $\frac{4(n-3)(n-4)(n-5)}{3}$ *piani bitangenti.*

Una proprietà importante delle curve razionali è quella relativa alla cosiddetta *involuzione fondamentale* esistente sulla curva.

Le coordinate $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ di un punto della curva si possono esprimere in funzione razionale di un parametro λ mediante le relazioni

$$x_1 \equiv a_\lambda^n$$

$$x_2 \equiv b_\lambda^n$$

$$x_3 \equiv c_\lambda^n$$

$$x_4 \equiv d_\lambda^n$$

(dove con a_λ^n, b_λ^n, ... si intendono, in notazione simbolica, forme binarie di grado n). Si costruiscano le $n - 3$ forme di grado n, *apolari* (vedi Cap. II) con ciascuna delle quattro date, e quindi con una qualunque del sistema lineare individuato da quelle quattro.

Il sistema lineare individuato dalle $n - 3$ forme così costruite rappresenterà una involuzione (v. Cap. II) di gruppi di n punti sulla curva data; si ha dunque:

Sulla curva razionale data esiste una involuzione di ordine n e di specie $n - 4$, i cui gruppi di n punti, sono apolari con tutti i gruppi di n punti tagliati sulla curva da un piano qualunque dello spazio.

Questa involuzione è stata chiamata da Stahl, *fondamentale*.

Quando $n = 4$, allora l'involuzione evidentemente si riduce ad un gruppo solo di 4 punti. *Per la quartica storta di 2.ª specie (razionale) tal gruppo di quattro punti è quello dei quattro punti di contatto dei piani osculatori stazionari* (v. § 4). Però in tal caso intervengono altre involuzioni trovate in generale da STUDY, come abbiamo accennato nel § 4.

Per lo studio della *involuzione fondamentale* sulle curve razionali si vegga specialmente STAHL (*Crelle*, CIV; *Math. Ann.*, XL). Altri lavori sulle curve razionali sono quelli di WEYR (*Giorn. di Batt.* IX; *Ann. di mat.*, IV; *Crelle*, LXXIV; *Ist. Lomb.*, 1882; *Prag. Berichte*, 1883, etc.), KÖRNDÖRFER (*Math. Ann.*, III), BRILL (*Id.*, XXXVI), etc. BERZOLARI (*Ann. di mat.*, XXI) estende alcune delle considerazioni precedenti alle curve razionali in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

CAPITOLO XI.

Le superficie di 3.° ordine.

§1. — Generalità. Le superficie a punti doppi. Generazioni geometriche.

La superficie generale di 3.° ordine è di 12.ª classe; l'ordine del cono ad essa circoscritto e col vertice in un punto qualunque dello spazio, è 6; le generatrici di regresso di tal cono sono 6 e non vi sono generatrici doppie. L'ordine della curva parabolica è il 12.°

L'equazione generale della superficie generale di 3.° ordine contiene 19 coefficienti non omogenei.

Su di una superficie cubica generale vi sono 27 rette.

Se una superficie di 3.° ordine ha una linea doppia, questa non può essere che una retta sola; in tal caso però la superficie cubica è una rigata.

Per una siffatta superficie cubica, vi sono sulla retta doppia due punti uniplanari (v. Cap. IX, § 4) *e gli altri sono biplanari.*

Una superficie cubica può avere al massimo quattro punti doppi.

Non esistono superficie sviluppabili PROPRIE *di 3.° ordine, ma solo superficie* IMPROPRIE, *come i coni e i cilindri di 3.° ordine.*

Ecco una tabella delle varie specie di superficie cubiche a punti singolari, e di rigate cubiche *(di queste ultime ve ne sono solo due specie).*

Questa classificazione fu fatta in modo completo da CAYLEY (*Phil. Trans.*, 1869); i casi (5) (7) (11) (15) (20) erano già stati considerati da SCHLAEFLI (*Phil. Trans.*, 1863). Le rigate cubiche erano già state studiate da CREMONA (*Istit. Lombardo*, 1861; *Crelle*, LX); si vegga anche un lavoro di EM. WEYR, *Geom. der räuml. Erzeugnisse.* Leipzig, 1870) *

---

* Nelle seguenti tabelle rappresenteremo coi simboli $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots v^{(1)}, v^{(2)} \ldots$ funzioni omogenee di gradi 1, 2, . . . in $x_1 \, x_2 \, x_3$.

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
1	Senza punti singolari	12	
2	Un punto conico	10	$u^{(2)} x_4 + u^{(3)} = 0.$ Il punto conico è $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
3	Un punto biplanare	9	$u^{(1)} v^{(1)} + u^{(3)} = 0$ Il punto biplanare è $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
4	Due punti conici	8	Nell'equazione del caso (2) si supponga che $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ contengano x_3 solo a primo grado.

	l'intersezione dei due piani tangenti appartenga alla superficie. Esso è da considerarsi come la riunione di due punti conici		si pone sotto la forma ridotta $$x_1 x_2 x_4 + u^{(3)} = 0,$$ l'equazione pel caso (5) si ottiene supponendo per es. che $u^{(3)}$ non contenga x_3^3. I piani tangenti sono $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
6	Un punto conico e un punto biplanare	7	L'equazione per questo caso si può ottenere dal caso (4) supponendo che il coefficiente di x_3 si scinda in due fattori.
7	Un punto biplanare come nel caso (5), ma supponendo che il piano tangente alla superficie lungo la retta intersezione dei due piani tangenti coincida con uno di que-	7	Un'equazione ridotta per questo caso è la seguente $$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - a x_1^3 = 0.$$ Il punto biplanare è $$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
	sti. Tale singolarità è da considerarsi come la riunione di un punto conico con un punto biplanare. Il piano tangente lungo la retta taglia la superficie nella retta stessa contata due volte e in un'altra retta diversa		coi piani tangenti $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e il piano tangente in un punto della retta intersezione di questi, è sempre $x_1 = 0$, che taglia la superficie in $x_1 = x_2 = 0$ contata due volte, e in $x_1 = x_3 = 0$ contata una sola volta.
8	Tre punti conici	6	Nell'equazione del caso (2) si supponga che $u^{(2)}$ $u^{(3)}$ contengano x_2, x_3 solo a primo grado.

			tenga x_3 solo a primo grado e il coefficiente di x_3 si scinda in due fattori.
10	Un punto conico e un punto biplanare della specie di quelli del caso (5)	6	Basterà nel caso (5) supporre che $u^{(3)}$ non contenga neanche x_3^2.
11	Un punto biplanare come nel caso (7), ma colla nuova particolarità che il piano tangente lungo la retta tagli la superficie nella stessa retta contata tre volte. Si dice allora che quella retta è *osculante* alla superficie, e tal punto è da considerarsi come la riunione di tre punti conici	6	Equazione ridotta è: $x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 - a x_1^3 = 0.$

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
12	Un punto uniplanare	6	$(x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 0.$
13	Un punto biplanare ordinario e due punti conici	5	$x_2 x_3 x_4 + x_1^2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0.$
14	Un punto biplanare come nel caso (7) e un punto conico	5	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 = 0.$
15	Un punto uniplanare, ma tale che il piano tangente in esso taglia la superficie lungo tre rette di cui due coincidenti	5	$x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 = 0.$
16	Quattro punti conici	4	$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 +$

	punto conico		
18	Un punto come nel caso (5) e due punti conici	4	$x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2) x_3^2 = 0.$
19	Un punto come nel caso (11) e un punto conico	4	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
20	Un punto uniplanare ma tale che il piano tangente in esso taglia la superficie secondo tre rette coincidenti	4	$x_1^2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
21	Tre punti biplanari	3	Basterà supporre nell'equazione del caso (9) che anche la x_2 sia contenuta a primo grado e che il suo coefficiente si scinda in due fattori.

Numero d'ordine	Natura della singolarità	Classe	Equazione della superficie
			Nel caso particolare in cui ai tre punti biplanari corrisponde a due a due un piano tangente comune la equazione ridotta della superficie è $x_1^3 + x_2 x_3 x_4 = 0.$
22	Una retta doppia, i cui punti sono tutti biplanari, meno due che sono uniplanari. La superficie è rigata. Essa è generata da una retta che si appoggia a due altre (direttrici) in modo che le punteggiate determinate su queste, di cui una sia semplice, e l'altra doppia	3	$x_3 x_1^2 - x_4 x_2^2 = 0.$ La retta doppia è $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Le direttrici sono le rette $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$ e $x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$

	retta doppia.		
23	Una retta doppia nei cui punti (biplanari o uniplanari) un piano tangente sia sempre il medesimo. Questa superficie può considerarsi come caso limite della precedente, quando le due direttrici tendano indefinitivamente ad avvicinarsi. Per la sua generazione vedi SALMON-FIEDLER cit. pag. 370. Questa superficie si suol chiamare *la rigata cubica di* CAYLEY.	3	$x_3^3 + x_1(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0.$ Il piano $x_1 = 0$ è tangente in ogni punto della retta doppia $x_1 = x_2 = 0$, e taglia la superficie secondo questa medesima retta contata *tre* volte. L'altro piano tangente inviluppa un iperboloide $x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0.$

La tabella dei numeri caratteristici relativi alla superficie generale di 3.° ordine e ad alcune delle altre superficie contenute nella precedente tabella, è *

	Generale	(2)	(3)	(4)	(6)	(8)	(9)	(12)	(13)	(16)	(17)	(21)	(22)
Punti conici	0	1	0	2	1	3	0	0	2	4	1	0	—
Punti biplanari	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0	2	3	—
Punti uniplanari	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—
$a = a'$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4
δ	0	1	0	2	1	3	0	3	2	4	1	0	0
$\varkappa$	6	6	7	6	7	6	8	6	7	6	8	9	3

b'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
k'	216	105	36	21	3	3	0	3	0	3	0	0	0
t'	45	15	6	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ρ'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
c'	24	18	16	12	10	6	8	6	4	0	2	0	0
h'	180	96	84	38	24	6	24	7	2	0	0	0	0
r'	30	24	18	17	12	9	8	7	5	0	2	0	0
σ'	12	12	12	10	9	6	8	6	4	0	2	0	0
β'	54	30	18	13	6	3	0	3	1	0	0	0	0

* I numeri segnati nella prima linea sono quelli delle Superficie elencate nella precedente tabella, e per la significazione delle lettere contenute nella prima colonna, rimandiamo al Capitolo IX, § 1.